

Chapitre XIII : Calcul numérique de la transformée de Fourier

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

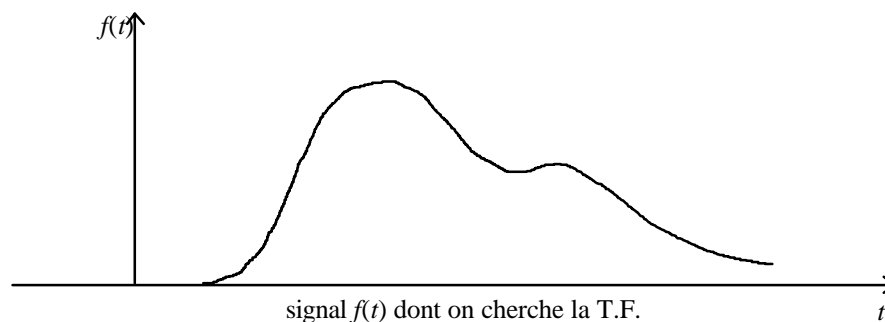
- *présenter le principe du calcul numérique de la transformée de Fourier*
- *donner les limitations intrinsèques du calcul numérique*
- *présenter l'algorithme FFT*
- *manipuler les paramètres d'une FFT pour obtenir la résolution et/ou le domaine exploré désirés*

Les logiciels de calcul permettent le calcul numérique de la transformée de Fourier (T.F.) d'une fonction discrétisée sur un domaine donné.

On présente ici l'algorithme utilisé afin de comprendre ce qu'une machine est capable de traiter et de pouvoir utiliser les résultats fournis. Comme la méthode est particulièrement utilisée dans le traitement du signal, les opérations sont décrites ici pour une fonction dépendant d'une *variable temporelle* t et on cherche sa transformée de Fourier en fonction de la *fréquence temporelle* n .

Les opérations faites pour le calcul conduisent à des *limitations intrinsèques* qui doivent être connues pour une bonne compréhension du résultat.

I Position du problème



Soit une fonction f du temps. Il s'agit de calculer sa transformée de Fourier définie par :

$$F(\mathbf{n}) = F[f(t)](\mathbf{n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt$$

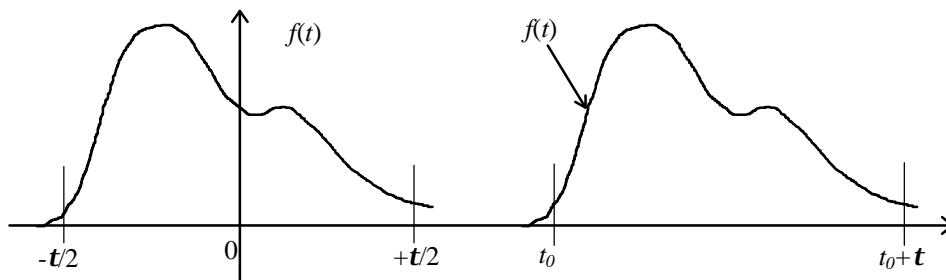
Dans certains cas, on peut effectuer formellement le calcul.

Par exemple, pour $f(t) = \sin(2\mathbf{p}\mathbf{n}_0 t)$, on obtient :

$$F(\mathbf{n}) = \frac{1}{2i} (\mathbf{d}(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) - \mathbf{d}(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0))$$

Mais le traitement des données expérimentales nécessite un calcul numérique et un outil adapté. Il s'agit donc pour chaque valeur de v de calculer numériquement une intégrale à valeur complexe.

II Limitations dues au fenêtrage du signal



La fonction n'est pas connue sur une durée infinie, mais sur la durée t de l'acquisition du signal: $t \in [t_0, t_0+t]$.

Pour observer l'effet du fenêtrage du signal, il est plus commode de raisonner sur une fenêtre centrée sur l'origine. Si le signal n'est pas centré, il suffit de décaler l'origine des temps en changeant t en $t + (t_0 + \frac{t}{2})$. Cela ne change d'ailleurs la TF que d'un facteur de phase :

$$F(\mathbf{n}) = \mathbb{F} [f(t)](\mathbf{n}) = e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}\left(t_0 + \frac{t}{2}\right)} \mathbb{F} [f(t + (t_0 + \frac{t}{2}))](\mathbf{n})$$

On suppose ainsi pour la suite que le fenêtrage est centré sur l'origine.

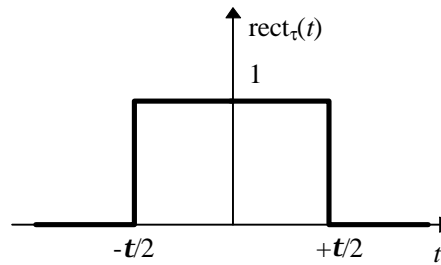
On calcule donc $\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} f(t)e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt$ à la place de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt$, ce qui

revient à calculer la T.F. de $g(t)$ à la place de celle de $f(t)$ avec :

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in \left[-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}\right] \\ 0 & \text{si } t \notin \left[-\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}\right] \end{cases}$$

soit $g(t) = f(t) \text{rect}_\tau(t)$

$\text{rect}_\tau(t)$ désigne ici la fonction rectangle représentée ci-contre.



On obtient donc :

$$G(\mathbf{n}) = F[f(t) \text{rect}_\tau(t)](\mathbf{n}) = F[f(t)](\mathbf{n}) * F[\text{rect}_\tau(t)](\mathbf{n})$$

$$= F(\mathbf{n}) * t \text{sinc}(p\mathbf{n}t)$$

(la T.F. d'un rectangle est un sinus cardinal: $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$)

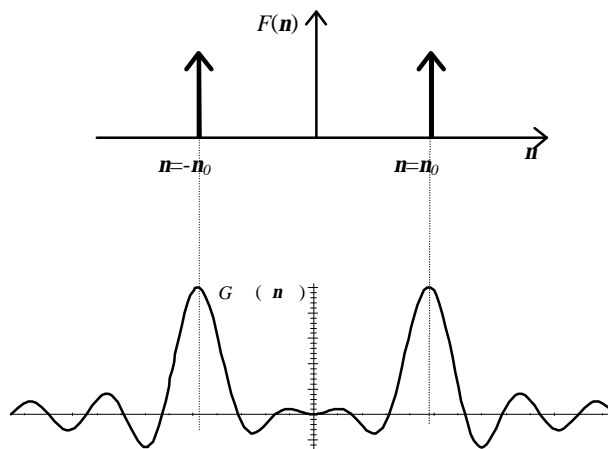
L'opérateur * désigne le produit de convolution.

☞ la transformée de Fourier de la fonction tronquée est la convolution de la TF de la fonction entière avec un sinus cardinal

On peut illustrer les conséquences de ce phénomène en examinant les différences entre $F(\mathbf{n})$ et $G(\mathbf{n})$ pour $f(t) = \cos(2p\mathbf{n}_0t)$

Alors:
$$F(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} [d(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) + d(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0)]$$

alors que
$$G(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} [t \text{sinc}(p(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)t) + t \text{sinc}(p(\mathbf{n} + \mathbf{n}_0)t)]$$



☞ la troncature de f apporte sur le spectre obtenu un élargissement des différentes composantes

Remarques: ① L'élargissement est caractérisé par la première annulation du sinc en $n = n_0 \pm \frac{1}{t}$. Ainsi, si la durée d'acquisition est suffisamment grande, alors :

$$t \operatorname{sinc}(\pi n \tau) \rightarrow d(n) \text{ et } G(n) \rightarrow F(n) * d(n) = F(n)$$

② Pour éviter les ondulations de la fonction sinc, on peut prendre des fenêtres plus « arrondies » que la fonction rectangle, citons les fenêtres triangulaires (ou de Bartlett), de Hann, de Hamming, de Blackmann,...

III T.F. numérique d'un signal périodique

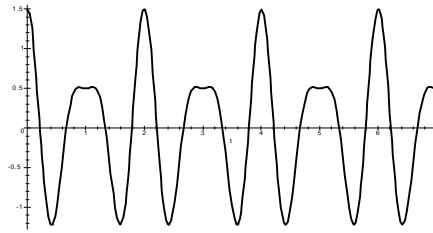
Nous montrons ici que le choix du fenêtrage pour un signal périodique a une grande influence sur le résultat du calcul.

Si le signal est *périodique* de période T , on peut le décomposer en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n 2\pi n_f t + j_n)$$

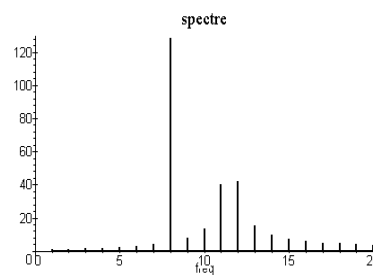
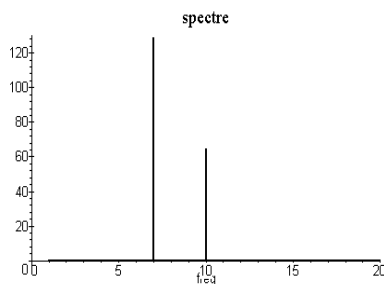
Son spectre est constitué des fréquences $n_p = p n_f$ $p=0 \dots \infty$ où $n_f = \frac{1}{T}$: sa TF est constituée de Dirac situés aux n_p .

Exemple: soit la fonction $f(t) = \cos(2\pi n_1 t) + 0,5 \cos(2\pi n_2 t)$



avec $\begin{cases} \mathbf{n}_1 = 1\text{Hz} \\ T_1 = 1\text{s} \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbf{n}_2 = 1,5\text{Hz} \\ T_2 = 2/3\text{s} \end{cases}$.

La période est $T=2$ secondes et sa TF est constituée de deux Diracs en \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 d'amplitude 1 et 0,5.



Le calcul de la TF numériquement à partir d'un échantillon de durée $t=6$ secondes donne les deux « Diracs » attendus (figure de gauche)

Par contre, le calcul de la TF sur un échantillon de durée $\tau=7$ secondes provoque l'élargissement de la seconde composante spectrale (figure de droite)

En effet, le spectre de G est une succession de sinc régulièrement espacés centrés sur les \mathbf{n}_p .

Ces sinc s'annulent en $\mathbf{n}_{p,k} = p \mathbf{n}_f + \frac{k}{t}$ (où k est un entier relatif *non nul*) et sont maximums en \mathbf{n}_p .

Par ailleurs, le spectre obtenu est discrétisé en fréquence: nous verrons que les fréquences pour lesquelles on calcule G sont $\mathbf{n}_q = \frac{q-1}{t}$ $q=1..N$. Si on s'arrange pour que ces fréquences coïncident avec les zéros du sinc, alors $G(\mathbf{n}_q)$ sera nulle partout, sauf lorsque $\mathbf{n}_q = \mathbf{n}_p$. Le graphe de G ressemble alors beaucoup à celui de F : « Dirac » aux \mathbf{n}_p

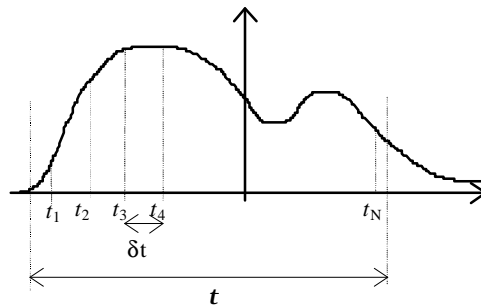
Il faut donc pour être dans ces conditions $\frac{q-1}{t} = p \mathbf{n}_f + \frac{k}{t}$

soit $t = (q-1-k) T$

☞ La TF numérique d'un signal périodique est constituée des « Diracs » non élargis lorsque la durée d'acquisition est un multiple entier de la période du signal.

Si la période est inconnue, t doit être grande devant T pour localiser avec précision les pics de $F(\mathbf{n})$.

IV Limitations dues à l'échantillonnage



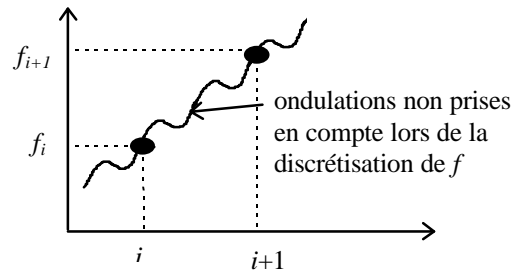
$f(t)$ est échantillonnée par N valeurs numériques f_1, f_2, \dots, f_N mesurées sur une durée t aux instants $t_1, t_2=t_1+\mathbf{dt}, t_3=t_1+2\mathbf{dt}, \dots, t_N=t_1+(N-1)\mathbf{dt}$.

La durée entre deux mesures ou période d'échantillonnage est :

$$T_e = \mathbf{dt} = \frac{t}{N}$$

La fréquence d'échantillonnage est $F_e = \frac{1}{dt} = \frac{N}{t}$

Si f vibre avec une fréquence supérieure à F_e , le spectre obtenu numériquement ne pourra pas en rendre compte: il y a perte d'information.



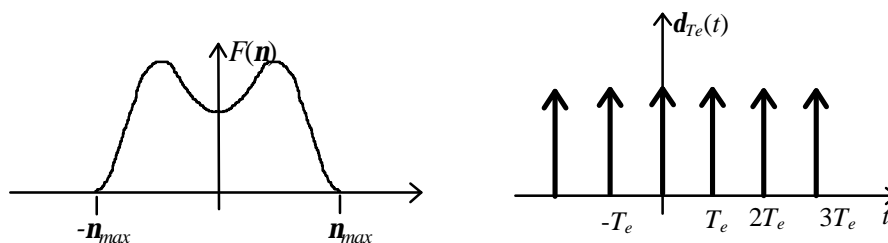
Le théorème de Shannon montre que les composantes spectrales de f supérieures à $\frac{F_e}{2}$ seront ainsi perdues.

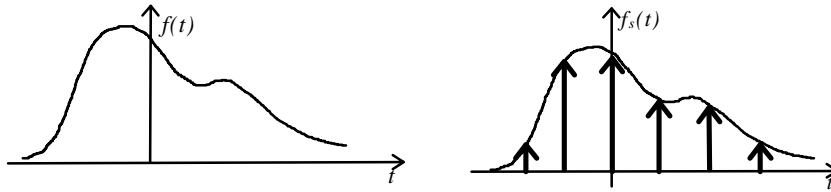
☞ Le spectre fréquentiel obtenu est limité à $\frac{F_e}{2} = \frac{N}{2t}$

V Théorème de Whittaker (1915) Shannon (1949)

Ce théorème précise dans quelles conditions on peut reproduire *exactement* un signal à partir de ses échantillons. L'idée de sa démonstration est intéressante dans la mesure où elle permet de voir la différence fondamentale qui existe entre la TF d'une fonction et la TF de la fonction échantillonnée correspondante.

Soit un signal représenté par une fonction f à bande limitée, c'est-à-dire dont le spectre est à support fini (remarquons qu'un signal physiquement réalisable est de *durée finie*, donc ne peut pas être à bande limitée...)





On définit la fonction échantillonnée f_s par : $f_s(t) = \mathbf{d}_{T_e}(t)f(t)$ où $\mathbf{d}_{T_e}(t)$ est le peigne de Dirac de pas T_e (figure ci-dessus) :

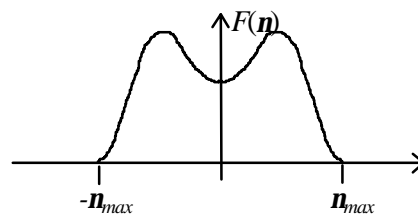
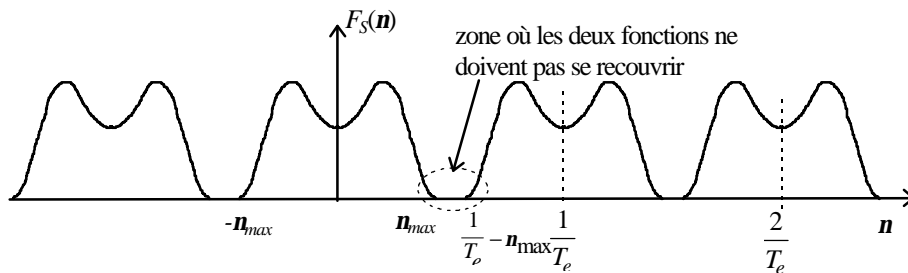
$$\mathbf{d}_{T_e}(t) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}\left(\frac{t}{T_e} - q\right)$$

f_s est un échantillonnage idéal de f , la fréquence d'échantillonnage étant $F_e = \frac{1}{T_e}$.

Notons F_s et F les T.F. de f_s et de f .

$$\begin{aligned} F_s &= \mathbb{F} [\mathbf{d}_{T_e}(t)f(t)] = \mathbb{F} [\mathbf{d}_{T_e}(t)] * F \\ &= T_e \mathbf{d}_{\frac{1}{T_e}}(\mathbf{n}) * F \text{ (la T.F. d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac)} \\ &= T_e \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}\left(T_e\left(\mathbf{n} - \frac{q}{T_e}\right)\right) * F = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}\left(\mathbf{n} - \frac{q}{T_e}\right) * F \\ &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} F\left(\mathbf{n} - \frac{q}{T_e}\right) \end{aligned}$$

☞ F_S est donc la superposition de fonctions F régulièrement espacées de $\frac{1}{T_e}$

Spectre de f 

spectre de la fonction échantillonnée

Si n_{max} est inférieure à $\frac{1}{T_e} - n_{max}$, soit $2n_{max}$ inférieure à F_e

les différentes fonctions F ne vont pas se recouvrir dans F_S et on peut alors récupérer l'intégralité de F en faisant passer F_S à travers un filtre rectangulaire de largeur $2n_{max}$:

$$F(\mathbf{n}) = F_S(\mathbf{i}) = \text{rect}_{2n_{max}}(\mathbf{n})$$

☞ Un signal peut exactement être reconstitué à partir d'un échantillonnage si la fréquence F_e d'échantillonnage est supérieure au double de sa fréquence maximale.

Le signal original est reconstitué avec la TF inverse de F . Par exemple, en se plaçant dans le cas limite où $T_e = \frac{1}{2n_{max}}$, on obtient :

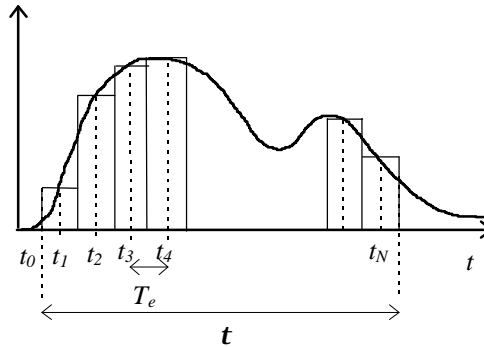
$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathbb{F}^{-1}[F(v)] = \mathbb{F}^{-1}[F_S(v) \operatorname{rect}_{2\mathbf{n}_{\max}}(\mathbf{n})] \\
&= \mathbb{F}^{-1}[F_S(v)] * \mathbb{F}^{-1}[\operatorname{rect}_{2\mathbf{n}_{\max}}(\mathbf{n})] \\
&= \frac{\mathbf{d}_1(t)}{T_e} f(t) * 2\mathbf{n}_{\max} \operatorname{sinc}(2\pi t \mathbf{n}_{\max}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}\left(\frac{t}{T_e} - n\right) f(t) * 2\mathbf{n}_{\max} \operatorname{sinc}(2\pi t \mathbf{n}_{\max}) \\
&= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(t - nT_e) f(t) * 2\mathbf{n}_{\max} \operatorname{sinc}(2\pi t \mathbf{n}_{\max}) \\
&= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \mathbf{d}(t - nT_e) * 2\mathbf{n}_{\max} \operatorname{sinc}(2\pi t \mathbf{n}_{\max}) \\
&= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) 2\mathbf{n}_{\max} \operatorname{sinc}(2\pi v_{\max}(t - nT_e))
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e) \operatorname{sinc}(2\mathbf{p}\mathbf{n}_{\max}(t - nT_e)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n}{F_e}\right) \operatorname{sinc}(\mathbf{p}F_e t - n\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat montre l'impossibilité d'utiliser la méthode rigoureusement sur des signaux physiquement réalisables.

VI Calcul numérique de la transformée de Fourier



On reprend ici une fonction f non nécessairement centrée sur l'origine, et on approxime sa T.F. par la méthode des rectangles. Pour limiter les erreurs, les échantillons sont pris au centre des intervalles d'approximation :

$$t_p = t_0 + \frac{T_e}{2} + (p-1) T_e = t_1 + (p-1) T_e$$

On pose : $f_p = f(t_p)$

La période d'échantillonnage est T_e et on a $F_e = 1/T_e$. La durée de l'échantillonnage est $t = N T_e$ et $F_e = N/t$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{n}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}nt} dt \cong \int_{t_0}^{t_0+t} f(t) e^{-i2\mathbf{p}nt} dt \cong \sum_p^N f(t_p) e^{-i2\mathbf{p}nt_p} T_e \\ &= T_e \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}n(t_0 + (p-1)T_e)} \\ &= T_e e^{-i2\mathbf{p}nt_0} \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}n(p-1)T_e} \end{aligned}$$

Le théorème de Shannon montre que le calcul de $F(\mathbf{n})$ n'aura un sens que si \mathbf{n} n'est pas trop élevée. On calcule ainsi $F(\mathbf{n})$ pour des *valeurs discrètes* de \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}_q = \frac{q-1}{N\Delta t} = \frac{q-1}{N} F_e = \frac{q-1}{t} \quad q=1\dots N$$

$$\text{Alors: } F_q = F(\mathbf{n}_q) = \Delta t e^{-i2\mathbf{p}(q-1)\frac{t_1}{t}} \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}\frac{(q-1)(p-1)}{N}}$$

Les logiciels de calcul fournissent par une procédure souvent appelée FFT la somme :

$$S_q = \sum_{p=1}^N f_p e^{-i\frac{2\mathbf{p}}{N}(q-1)(p-1)}$$

$$\text{de sorte que: } F_q = F(\mathbf{n}_q) = T_e e^{-i2\mathbf{p}\frac{(q-1)t_1}{N}} T_e S_q \quad \text{avec } \mathbf{n}_q = \frac{q-1}{t}$$

Ainsi, $|F(\mathbf{n}_q)| = T_e |S_q|$. Par contre la phase $\mathbf{f}(\mathbf{n}_q) = \text{argument}[F(\mathbf{n}_q)]$ est en général moins directement reliée à $\text{argument}[S_q]$

VII Algorithme FFT

$$\text{On souhaite calculer la somme: } S_q = \sum_{p=1}^N f_p e^{-i\frac{2\mathbf{p}}{N}(q-1)(p-1)}$$

Supposons que N est *pair* et posons $N=2P$.

On distingue dans la somme S_q les indices p pairs ($p=2j$) et les indices p impairs ($p=2j-1$), alors :

$$S_q = \sum_{p=1}^N f_p e^{-i\frac{2\mathbf{p}}{N}(q-1)(p-1)}$$

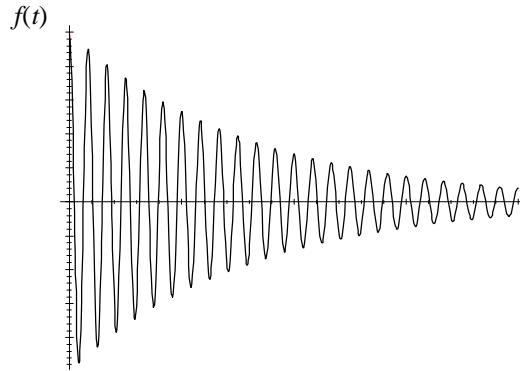
$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^P \left(f_{2j} e^{-i \frac{2p}{2P}(q-1)(2j-1)} + f_{2j-1} e^{-i \frac{2p}{2P}(q-1)(2j-2)} \right) \\
&= e^{i \frac{2p}{2P}(q-1)} \sum_{j=1}^P f_{2j} e^{-i \frac{2p}{2P}(q-1)(2j-2)} + \sum_{j=1}^P f_{2j-1} e^{-i \frac{2p}{2P}(q-1)(2j-2)} \\
&= e^{i \frac{2p}{N}(q-1)} \sum_{j=1}^P f_{2j} e^{-i \frac{2p}{P}(q-1)(j-1)} + \sum_{j=1}^P f_{2j-1} e^{-i \frac{2p}{P}(q-1)(j-1)} \\
&= e^{i \frac{2p}{N}(q-1)} S_q^{paire} + S_q^{impaire}
\end{aligned}$$

De plus: $S_{q+p} = -e^{i \frac{2p}{N}(q-1)} S_q^{paire} + S_q^{impaire}$ (le calcul de S_q donne « en prime » le calcul de S_{q+p})

Les deux sommes S_q^{paire} et $S_q^{impaire}$ se calculent exactement de la même manière que S_q , de sorte que le calcul d'une TF numérique de N points se ramène à celle de deux TF numériques de $\frac{N}{2}$ points. Si $\frac{N}{2}$ est lui même pair, on peut itérer le procédé et appliquer la méthode aux deux sommes S_q^{paire} et $S_q^{impaire}$.

☞ L'algorithme est donc appliqué à des sommes où N est une puissance de 2: $N=2^m$.

On montre alors que le nombre d'opérations pour calculer tous les S_q passe de N^2 à Nm , soit un gain de temps considérable lorsque N devient grand.

VIII Exemple

Soit la fonction :

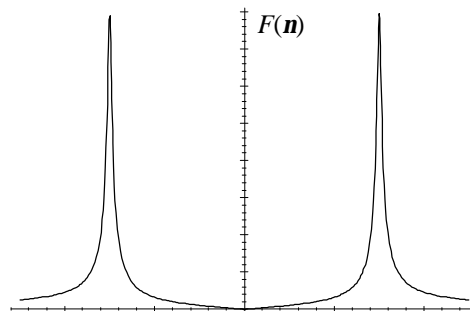
$$f(t) = \text{Heaviside}(t) e^{-2\pi a t} \cos(2\pi n_0 t) \quad (a=0,5 \text{ et } n_0=30 \text{ Hz})$$

Il s'agit d'une sinusoïde amortie débutant à $t=0$. (figure)

Sa T.F. est :

$$F(n) = \frac{1}{2p} \frac{a + in}{(a + i(n - n_0))(a + i(n + n_0))}$$

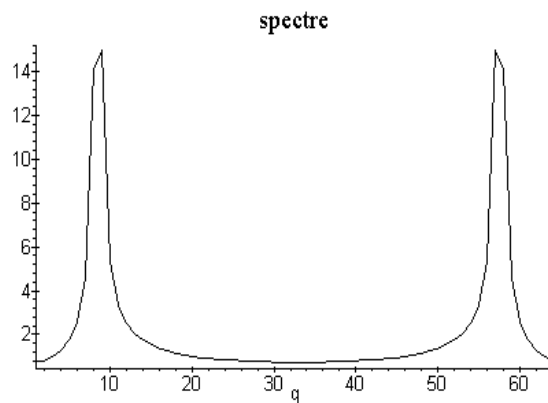
et son spectre présente un pic à $n \cong n_0 = 30$ Hz (figure)



Le calcul numérique du spectre est conduit en échantillonnant sur une durée $t=0.25$ s avec $N=2^6=64$ points à partir de $t_1=0$.

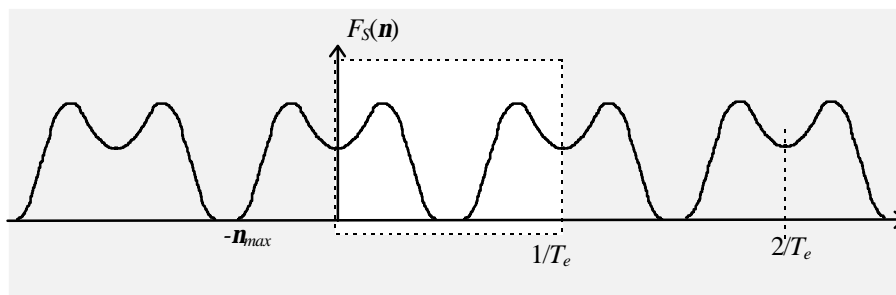
La fréquence d'échantillonnage est $F_e = \frac{64}{0,25} = 256$ Hz.

Le spectre obtenu numériquement présente un maximum voisin de l'entier $q=9$, soit $n_q = \frac{q-1}{t} = \frac{8}{0.25} = 32$ Hz $\cong n_0$ (figure ci-après) :



Le spectre présente par ailleurs deux parties symétriques l'une de l'autre . Pour comprendre le phénomène, il suffit de se souvenir que *ce n'est pas* la T.F. de f que l'on calcule, mais celle de la fonction échantillonnée f_s (voir le paragraphe sur le théorème de Shannon). Son spectre est la succession de spectre de f régulièrement espacés de

$$F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{1}{t/N} = \frac{N}{t} .$$



L'algorithme permet le calcul des fréquences $n_q = \frac{q-1}{t}$ avec $q=1\dots N$ et fournit en définitive la fin du spectre (à partir de $n=0$), puis son commencement (zone encadrée sur la figure)

☞ La première partie de la somme ($q=1 \dots \frac{N}{2}$) est la « fin » du spectre ($\mathbf{n} \hat{\mathbf{I}} [0, \mathbf{n}_{\max}]$)

La seconde partie ($q=\frac{N}{2}+1 \dots N$) est le « début » du spectre ($\mathbf{n} \hat{\mathbf{I}} [-\mathbf{n}_{\max}, 0[$)

Cette propriété de la transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée s'appelle le « phénomène de repliement » du spectre.

Remarque : si f est réelle, alors $F(-\mathbf{n}) = \overline{F(\mathbf{n})}$, et le spectre est pair et la seconde partie est redondante. Par contre, si f est complexe, la seconde partie sera utilisable.

Remarques pratiques: ① Augmentation du domaine fréquentiel exploré:

Il suffit d'augmenter N puisque $\mathbf{n}_{\max} = \frac{N}{2t}$. Si on double N , le domaine fréquentiel balayé double mais la durée du calcul double aussi approximativement.

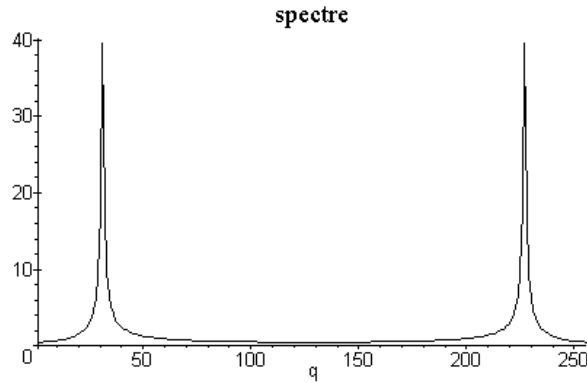
② Augmentation de la résolution:

Dans l'exemple, le maximum du spectre n'est pas localisé avec précision. On peut être amené à augmenter la résolution, c'est-à-dire le nombre de points de calcul en maintenant le domaine fréquentiel exploré inchangé: $\mathbf{n}_{\max} = \frac{N}{2t} = cte$.

Donc, N et t doivent augmenter dans les mêmes proportions.

☞ pour doubler la résolution, il faut doubler N et également doubler t .

La figure reprend l'exemple avec une résolution quadruplée ($N=2^8$ et $t=1$ s)



On peut aussi augmenter la résolution en diminuant le domaine fréquentiel balayé (augmentation de t) en maintenant N constant.

③ *Calcul des fréquences négatives:*

Calculons $F(\mathbf{n}_q)$ avec $q=N-q'+2$:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{n}_q) &= T_e e^{-i2\mathbf{p}(q-1)\frac{t_1}{t}} \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}\frac{(q-1)(p-1)}{N}} \\
 &= T_e e^{-i2\mathbf{p}(N-q'+1)\frac{t_1}{t}} \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}\frac{(N-q'+1)(p-1)}{N}} \\
 &= T_e e^{-i2\mathbf{p}(-(q'-1))\frac{t_1}{t}} e^{-i2\mathbf{p}\frac{t_1}{T_e}} \sum_{p=1}^N f_p e^{-i2\mathbf{p}\frac{(-(q'-1))(p-1)}{N}} = e^{-i2\mathbf{p}\frac{t_1}{T_e}} F(-\mathbf{n}_{q'})
 \end{aligned}$$

On voit que $F(-\mathbf{n}_{q'}) = e^{+i2\mathbf{p}\frac{t_1}{T_e}} F(\mathbf{n}_{N-q'+2})$

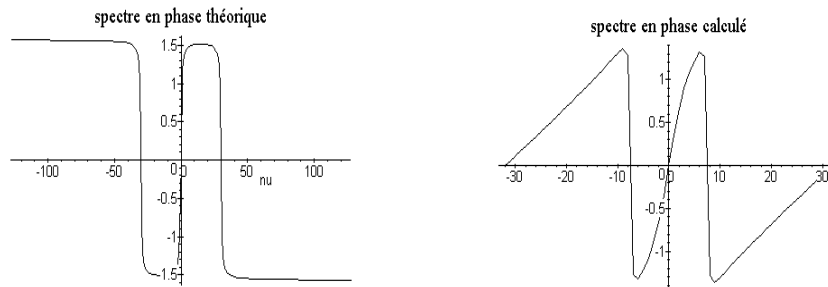
☞ La fréquence négative $-\mathbf{n}_{q'} = -\frac{q'-1}{t}$ est donc calculée avec l'entier $N-q'+2$

IX Calcul de la phase

Puisque $F(n_q) = \int dt e^{-i2\pi \frac{(q-1)t_1}{N T_e}} S_q$ et que $F(-n_{q'}) = e^{+i2\pi \frac{t_1}{T_e}} F(n_{N-q'+2})$, le calcul de la phase conduit à:

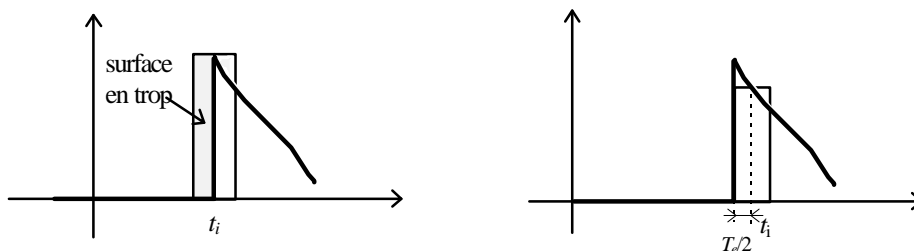
$$\begin{cases} f(n_q) = -2\pi \frac{q-1}{N} \frac{t_1}{T_e} + \arg[S_q] \\ f(-n_{q'}) = f(n_{N-q'+2}) + 2\pi \frac{t_1}{T_e} \end{cases}$$

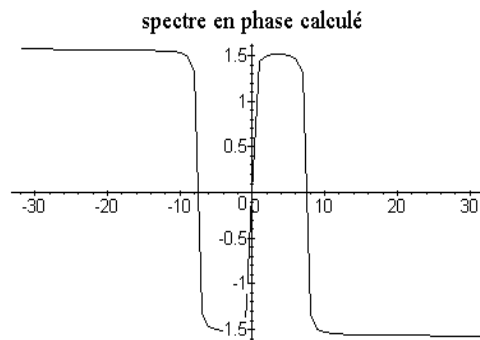
Ces deux expressions donnent des résultats corrects tant que le signal analysé ne présente pas de discontinuité. Dans le cas contraire (comme pour l'exemple $f(t) = \text{Heaviside}(t) e^{-2\pi a t} \cos(2\pi n_0 t)$: sinusoïde amortie débutant à $t=0$), les résultats obtenus peuvent être erronés comme on peut le constater sur les courbes ci-dessous.



Le problème provient du fait qu'il existe un échantillon sur la discontinuité.

Si t_i est sur la discontinuité, on voit que le rectangle d'approximation apporte une grande erreur sur l'estimation de l'intégrale.





En revanche, si on s'arrange (ce qui n'est pas toujours possible) pour prélever l'échantillon à une distance $\frac{T_e}{2}$ de la discontinuité, les erreurs se compensent.

On montre ici le spectre en phase obtenu en échantillonnant la fonction discontinue en $t=0$ à partir de $t_1 = \frac{T_e}{2}$. L'accord est maintenant satisfaisant.

On peut aussi remarquer, pour éviter de refaire l'échantillonnage, que tout se passe comme si le signal débutait en $t_1 = -T_e/2$.

X Conclusions

Soit un signal $f(t)$. Pour calculer numériquement sa transformée de Fourier, il faut :

- ① échantillonner f sur une durée t à partir de t_1 avec $N=2^m$ points:

$$f_p = f\left(t_1 + \frac{p-1}{N} t\right) \quad p=1 \dots N$$

- ② calculer par l'algorithme FFT les sommes S_q $q=1 \dots N$

- ③ on a alors :

$$\begin{cases} |F(\mathbf{n}_q)| = T_e |S_q| \\ |F(-\mathbf{n}_{q'})| = |F(\mathbf{n}_{N-q'+2})| \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{n}_q) = -2\mathbf{p} \frac{q-1}{N} \frac{t_1}{T_e} + \arg[S_q] \\ \mathbf{f}(-\mathbf{n}_{q'}) = \mathbf{f}(\mathbf{n}_{N-q'+2}) + 2\mathbf{p} \frac{t_1}{T_e} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathbf{n}_q = \frac{q-1}{t} = \frac{q-1}{N T_e} = \frac{q-1}{N} F_e$$

Le domaine fréquentiel exploré s'étend de $-\mathbf{n}_{max}$ à $+\mathbf{n}_{max}$ avec :

$$\dot{f}_{\max} = \frac{N}{2t} = \frac{F_e}{2}$$

On trouvera en annexe un exemple de calcul de FFT réalisé avec MAPLE.

Bibliographie

- ◇ - Fichier aide en ligne, Maple, Mathematica.
- ◇ - Traitement numérique des signaux, Murat Kunt, Presses polytechniques Romandes
- ◇ - Mathématiques de l'ingénieur, Jean-Marie Monier, photocopié.
- ◇ - Introduction to Fourier Optics, Joseph W. Goodman, Mc-Graw-Hill
- ◇ - Optics, Hecht, Addison Wesley