

Chapitre XII : Transformée de Fourier

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- définir la transformée de Fourier
- donner quelques exemples d'utilisation en Sciences Physiques
- donner le spectre de Fourier d'une fonction
- calculer quelques transformées de Fourier usuelles
- définir et interpréter le produit de convolution
- utiliser la transformation de Fourier pour l'étude des systèmes linéaires

I Définitions et exemples

1°- Transformée de Fourier et Transformée de Fourier inverse

Soit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On définit la *transformée de Fourier* de f (T.F.) par:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

On note: $f \xrightarrow{T.F.} F$ ou encore $F = F[f]$ et $F(u) = F[f](u)$

ou encore : $\hat{f}(u) = F[f](u)$

On définit de même la *transformée de Fourier inverse* de F (ou *cotransformée*) par:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

La seule différence avec la transformée directe est le signe dans l'exponentielle.

On note: $F \xrightarrow{T.F.^{-1}} f$ ou encore $f = F^{-1}[F]$ et $f(x) = F^{-1}[F](x)$

2°- Théorème

Si la fonction f n'est pas trop irrégulière, ce qui sera souvent le cas en Sciences Physiques, alors la transformée inverse de la transformée de f redonne f :

$$\boxed{F^{-1}[F[f]] = f \quad \text{et} \quad F[F^{-1}[F]] = F}$$

En un point de discontinuité de f , $F^{-1}[F[f]]$ prend la valeur moyenne de f .

3°- Existence

Pour la plupart des fonctions rencontrées en Physique, la transformée de Fourier de f existe. Par exemple:

* Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge, alors $F[f]$ existe.

* Si f a un support borné ($\exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \notin [a, b] f(x) = 0$) et est continue par morceaux, alors $F[f]$ existe.

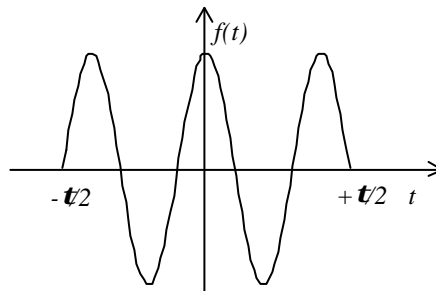
4°- Analyse d'un phénomène physique variable dans le temps

Soit un phénomène physique variable dans le temps décrit par une fonction $f(t)$. $F(\boldsymbol{n}) = F[f](\boldsymbol{n})$ donne la composition fréquentielle du phénomène physique.

Par exemple, considérons un *train d'onde sinusoïdal* passant en un point M de l'espace (une onde de gravitation dans un fluide, une onde électromagnétique, une onde acoustique dans un tube, etc.). Le train d'onde sera décrit par la fonction :

$$\begin{cases} f(t) = \cos(2\boldsymbol{p}\boldsymbol{n}_0 t) \text{ si } t \in]-\frac{\boldsymbol{t}}{2}, +\frac{\boldsymbol{t}}{2}[\\ f(t) = 0 \text{ si } t \notin]-\frac{\boldsymbol{t}}{2}, +\frac{\boldsymbol{t}}{2}[\end{cases}$$

La durée du train d'onde est \boldsymbol{t}



Alors

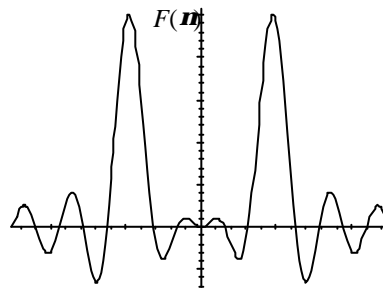
$$\begin{aligned} F(\mathbf{n}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt = \int_{-t/2}^{+t/2} \cos(2\mathbf{p}\mathbf{n}_0 t) e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt \\ &= \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{e^{+i2\mathbf{p}\mathbf{n}_0 t} + e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}_0 t}}{2} e^{-i2\mathbf{p}\mathbf{n}t} dt \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} F(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{+t/2} (e^{+i2\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})t} + e^{-i2\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})t}) dt \\ &= \frac{t}{2} \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})t} - e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})t}}{\mathbf{p}t(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})} + \frac{e^{+i\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})t} - e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})t}}{\mathbf{p}t(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})} \right) \end{aligned}$$

D'où, en introduisant la fonction *sinus cardinal*: $\text{sin c}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$F(\mathbf{n}) = \frac{t}{2} (\text{sin c}(\mathbf{p}t(\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})) + \text{sin c}(\mathbf{p}t(\mathbf{n}_0 + \mathbf{n})))$$



Transformée de Fourier du train d'ondes

Cet exemple permet de dégager deux conséquences importantes:

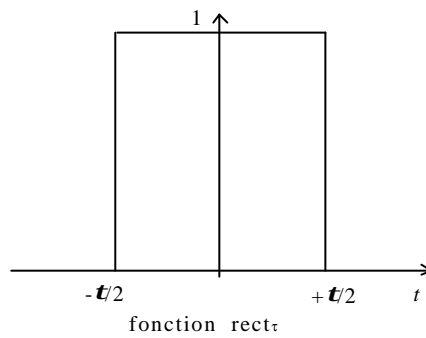
✂ un phénomène physique purement sinusoïdal n'existe pas puisque la durée du phénomène est toujours finie. Dans le cas du train d'onde, le signal est certes composé d'une vibration de fréquence \mathbf{n}_0 , mais aussi de fréquences satellites disposées autour de \mathbf{n}_0 .

↳ la largeur à mi-hauteur de la fonction $\text{sinc}(x)$ ($\text{sinc}(x)=1/2$ donne $x=\pm 1,9$) permet de relier la *durée t du train d'onde* à la sa *largeur spectrale $\Delta\nu$* :

$$\boxed{\Delta n \cdot t \approx 1}$$

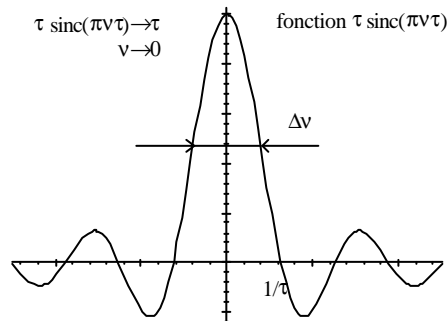
Un autre exemple significatif est celui d'une impulsion rectangulaire de largeur t où le phénomène physique est représenté par la fonction « rect_t » :

$$f(t)=\text{rect}_t(t) \text{ avec } \text{rect}_t(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-t/2, +t/2] \\ 0 & \text{si } t \notin [-t/2, +t/2] \end{cases}$$



$$F(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi n t} dt = \int_{-t/2}^{+t/2} e^{-i2\pi n t} dt$$

$$= \frac{1}{i2\pi n} (e^{+i\pi n t} - e^{-i\pi n t}) = t \text{ sinc}(\pi n t)$$



On peut de même que pour le train d'onde formuler deux remarques:

⌘ un phénomène physique parfaitement indépendant du temps (continu) n'existe pas. Dans le cas d'une impulsion rectangulaire, le spectre du signal est essentiellement constitué de la fréquence nulle, mais pas seulement. On peut aussi vérifier que $\Delta \omega \Delta t \neq 1$.

∃ il est intéressant de voir ce que devient la transformée de Fourier de l'impulsion rectangulaire lorsque sa durée devient très grande ($t \rightarrow \infty$). On pose $\mathbf{d}(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} t \text{sinc}(\omega t)$ où la fonction \mathbf{d} de Dirac est une fonction qui est souvent utilisée grâce à ses propriétés intéressantes. Par exemple :

- cette fonction est nulle partout, sauf en $\omega=0$ où elle est infinie: elle sera donc utile pour modéliser des phénomènes physiques ponctuels (ici, c'est la composition fréquentielle d'un signal continu).

- la transformée de Fourier de $f(t)=1$ est $\mathbf{d}(\omega)$:

$$\mathbf{d}(\omega) = F[1](\omega)$$

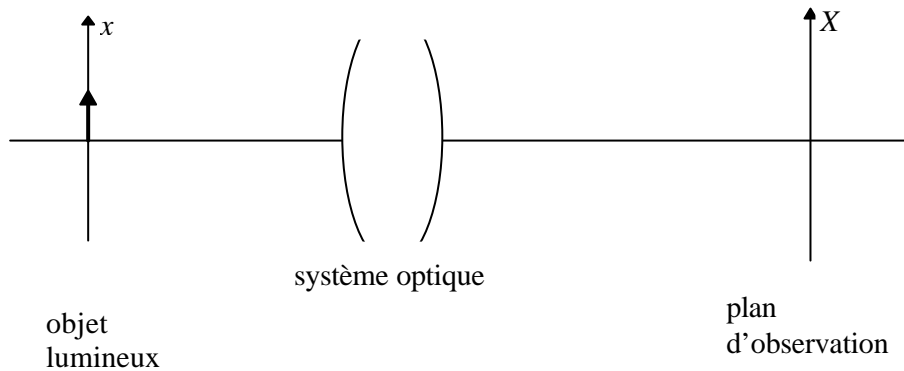
- la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{d}(\omega)$ est 1 :

$$1 = F^{-1}[\mathbf{d}(\omega)](t)$$

On voit qu'il est possible de généraliser la transformation de Fourier à des fonctions qui ne satisfont pas les critères d'existence.

5°- Visualisation d'une transformée de Fourier à l'aide d'un système optique

Un objet lumineux émet une vibration décrite par la fonction $s_0(x) = f(x)$. A l'aide d'un système optique approprié, la vibration lumineuse $s_f(X)$ reçue dans certains plans s'exprime facilement à l'aide de $F[f]$:



Il est alors possible: - de visualiser $|F[f]|^2$ à l'aide d'un écran.
- de modifier $F[f]$ (lentilles, diaphragme, etc.) pour recomposer une image traitée de l'objet (traitement optique des images). Le traitement optique des images est maintenant supplanté par le traitement numérique: les calculateurs travaillent directement sur l'image numérisée.

Dans le même ordre d'idée, l'onde électromagnétique diffractée par un cristal est directement reliée à la T.F. de la densité électronique dans le cristal. La radiocristallographie est la science qui tente de reconstruire la structure cristalline à partir du module de cette T.F. (les détecteurs ne peuvent mesurer que $|F[f]|^2$).

6°- Autres définitions de la transformée de Fourier

Il peut être intéressant dans certains cas d'obtenir le spectre de f en fonction d'une pulsation plutôt que d'une fréquence. Dans ce cas, on définit la transformée de Fourier de f par:

$$G(\mathbf{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt$$

Mais la transformée de Fourier inverse s'écrit alors :

$$f(t) = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{w}) e^{+i\mathbf{w}t} d\mathbf{w}$$

En effet, $G(\mathbf{w}) = F(\mathbf{w}/2\pi)$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{w}) e^{+i\mathbf{w}t} d\mathbf{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{w}/2\mathbf{p}) e^{+i\mathbf{w}t} d\mathbf{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{n}) e^{+i2\mathbf{p}t} 2\mathbf{p} d\mathbf{n} = 2\mathbf{p} f(t)$$

On peut aussi adopter une formulation plus symétrique:

$$G(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\mathbf{w}t} dt \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{w}) e^{+i\mathbf{w}t} d\mathbf{w}$$

II Propriétés de la transformée de Fourier

1°- Parité

Si f est réelle et paire, alors $F[f]$ est réelle et paire et

$$F[f](u) = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\mathbf{p}ux) f(x) dx$$

Si f est réelle et impaire, alors $F[f]$ est imaginaire pure et impaire et

$$F[f](u) = -2i \int_0^{+\infty} \sin(2\mathbf{p}ux) f(x) dx$$

2°- Conjugaison

On définit la fonction conjuguée de f par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$. Alors:

$$\boxed{F[\bar{f}](u) = \overline{F[f](-u)}}$$

3°- Comportement asymptotique de la transformée de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, ($\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge), alors $F[f]$ est de limite nulle en $-\infty$ et $+\infty$.

De façon générale :

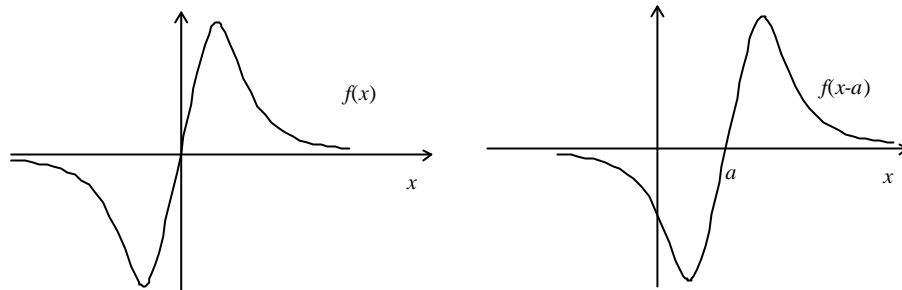
- plus f est régulière, plus F tend vers zéro à l'infini.
- plus f tend vers zéro à l'infini, plus F est régulière.

4°- Linéarité

$$\boxed{F[\mathbf{I}_1 f_1 + \mathbf{I}_2 f_2] = \mathbf{I}_1 F[f_1] + \mathbf{I}_2 F[f_2]}$$

Cette propriété est essentielle pour pouvoir utiliser la transformation de Fourier dans les systèmes physiques linéaires.

5°- Translation sur x



$$\mathcal{F}[f(x-a)](u) = e^{-i2\pi u a} \mathcal{F}[f](u)$$

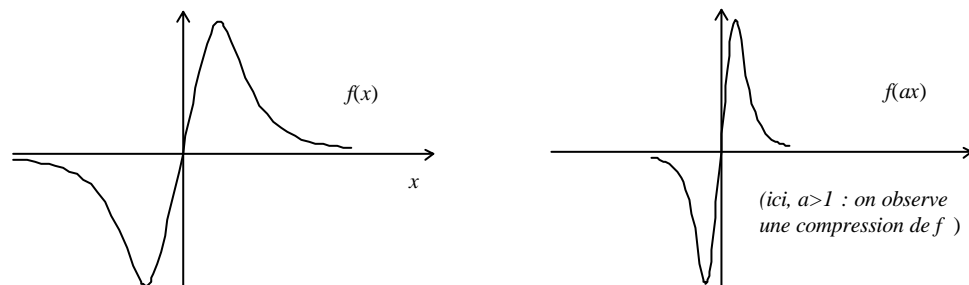
Ainsi, une translation de f ne fait qu'introduire un facteur de phase dans $\mathcal{F}[f]$. En effet, la translation de f ne change pas son contenu sinusoidal.

6°- Translation sur u

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(u-u_0)](x) = e^{+i2\pi u_0 x} f(x)$$

Remarque: $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2}(\mathcal{F}(u-u_0) + \mathcal{F}(u+u_0))\right](x) = \frac{1}{2}(e^{+i2\pi u_0 x} + e^{-i2\pi u_0 x}) f(x)$
 $= \cos(2\pi u_0 x) f(x)$ (modulation en amplitude)

7°- Changement d'échelle



$$\mathbb{F} [f(ax)](u) = \frac{1}{|a|} \mathbb{F} \left[f \left(\frac{u}{a} \right) \right]$$

Ainsi, un étalement de la fonction f va produire une compression de $\mathbb{F}[f]$ et réciproquement.

8°- Dérivation de f

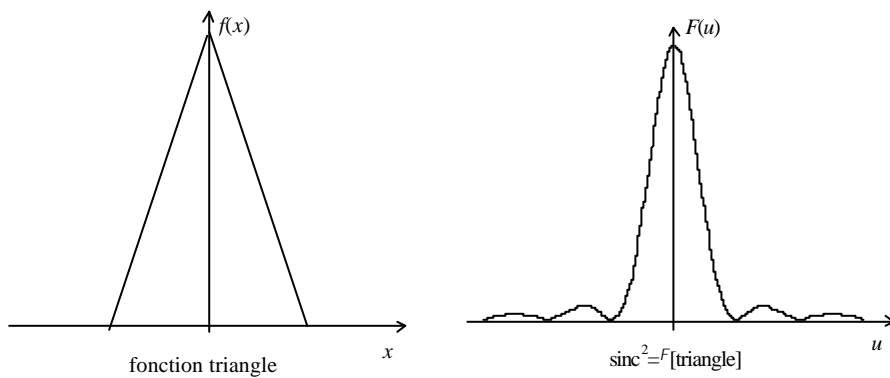
Notons f' la dérivée de f par rapport à x . Alors:

$$\mathbb{F} [f'](u) = 2i\mathbf{p}u \mathbb{F} [f](u)$$

$$\text{et donc } \mathbb{F} [f^{(n)}](u) = (2i\mathbf{p}u)^n \mathbb{F} [f](u)$$

On peut utiliser cette propriété pour calculer la transformée de Fourier de la fonction « triangle » de largeur $2X$ définie par :

$$\Lambda_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -X \text{ ou } x > +X \\ x + X & \text{si } -X \leq x \leq 0 \\ -x + X & \text{si } 0 \leq x \leq +X \end{cases}$$



$$\text{On a alors } \Lambda'_X(x) = \text{rect}_X(x+X/2) - \text{rect}_X(x-X/2)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } F[\Lambda_X'](u) &= e^{i2p\frac{X}{2}u} X \operatorname{sinc}(pXu) - e^{i2p\frac{-X}{2}u} X \operatorname{sinc}(pXu) \\ &= 2iX \sin(pXu) \operatorname{sinc}(pXu) = i2pX^2 \operatorname{sinc}^2(pXu) \end{aligned}$$

$$\text{Soit, en identifiant: } F[\Lambda_X](u) = X^2 \operatorname{sinc}^2(pXu)$$

9°- Multiplication par x

En notant F' la dérivée de F par rapport à u , on remarque que

$$\boxed{F[-i2pxf](u) = F'(u)}$$

Application: on peut par exemple montrer que :

$$F[x \cdot \operatorname{rect}_x(x)](u) = \frac{1}{-i2p} \frac{pXu \cos(pXu) - \sin(pXu)}{pu^2}$$

10°- Théorème de Parseval

Soit une grandeur physique représentée par $f(x)$ et notons $F(u)$ sa transformée de Fourier: $F(u) = F[f](u)$.

$F(u)$ est le spectre fréquentiel de la grandeur physique: $F(u)du$ chiffre l'amplitude complexe des contributions à f de fréquences comprises entre u et $u+du$. $|F(u)|^2$ représente la *densité spectrale d'énergie* et l'énergie

totale de la grandeur physique est $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 du$

Pour fixer les idées, supposons que la variable x soit une variable de position (on aurait pu raisonner avec une variable temporelle). Alors $|f(x)|^2$ est la densité spatiale d'énergie, c'est-à-dire que l'énergie du

phénomène physique observé entre x et $x+dx$ est $|f(x)|^2 dx$. L'énergie totale est $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$.

On a donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2 du$$

C'est le *théorème de Parseval Plancherel* qui montre que l'énergie totale d'un phénomène physique est répartie sur ses différentes composantes spectrales. Ce résultat est à rapprocher de l'égalité de Parseval des coefficients de Fourier dans les décompositions en séries de Fourier.

Pour montrer cette propriété, montrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(u)G(u)du$$

comme $g(x) = \mathbb{F}^{-1}[G](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{i2\pi ux} du$

alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{i2\pi ux} du \right) dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x)e^{i2\pi ux} dx \right) du \quad (\text{théorème de Fubini})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx \right)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)\bar{F}(u)du$$

Le cas où $g=f$ permet de retrouver le théorème de Parseval

III Exemples de transformées de Fourier

Le calcul d'une transformée de Fourier peut-être effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Mathematica, Maple, etc.). On donne ici les principaux résultats.

1°- La fonction rectangle

Rappelons que pour la fonction rectangle de largeur X définie par :

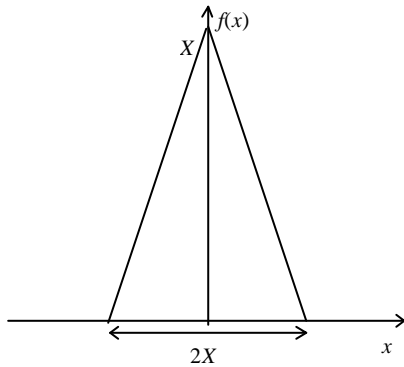
$$\text{rect}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-X/2, +X/2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-X/2, +X/2] \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{F}[\text{rect}_X](u) = X \text{ sinc}(pXu)}$$

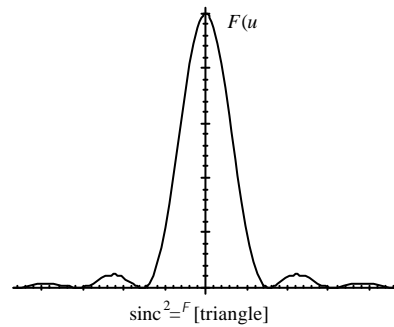
2°- La fonction triangle

Pour la fonction triangle de largeur $2X$ définie par:

$$\Lambda_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -X \text{ ou } x > +X \\ x + X & \text{si } -X \leq x \leq 0 \\ -x + X & \text{si } 0 \leq x \leq +X \end{cases}$$

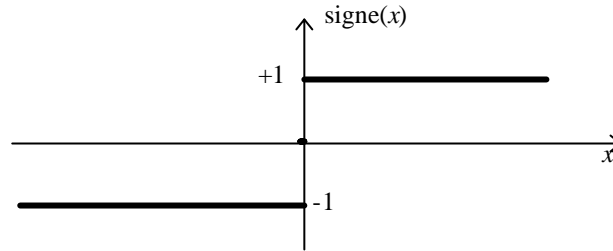


fonction triangle de largeur $2X$



$$\boxed{\mathcal{F}[\Lambda_X](u) = X^2 \text{ sinc}^2(pXu)}$$

3°- La fonction signe



La fonction signe est définie par:

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On remarque que : $\text{rect}_{x=1}(x) = \frac{1}{2} \left(\text{signe}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \text{signe}\left(x - \frac{1}{2}\right) \right)$

Donc

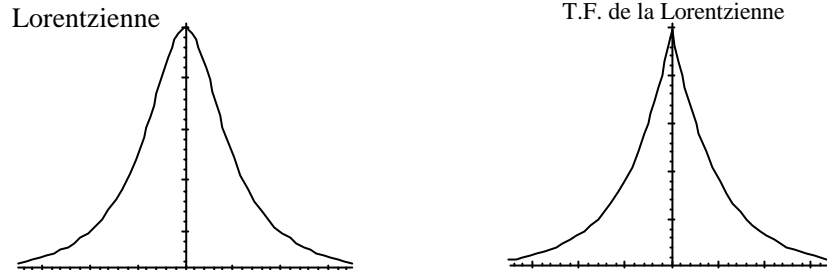
$$\begin{aligned} F[\text{rect}(x)](u) &= \text{sinc}(\pi u) = \frac{1}{2} F[\text{signe}\left(x + \frac{1}{2}\right)] - \frac{1}{2} F[\text{signe}\left(x - \frac{1}{2}\right)] \\ &= \frac{1}{2} F[\text{signe}(x)] e^{i\frac{2p}{2}u} - \frac{1}{2} F[\text{signe}(x)] e^{-i\frac{2p}{2}u} \end{aligned}$$

D'où $\frac{\sin(\mathbf{pu})}{\mathbf{pu}} = i F[\text{signe}(x)] \sin(\mathbf{pu})$

On en tire:

$$\boxed{F[\text{signe}(x)](u) = \frac{1}{i\mathbf{pu}}}$$

4°- La Lorentzienne



La Lorentzienne est la fonction $f(x) = \frac{1}{b^2 + x^2}$ avec b réel. Elle décrit notamment le spectre de la lumière émise par une lampe spectrale haute pression.

Pour évaluer sa T.F., calculons $F[e^{-a|x|}]$ où a est un réel positif. La fonction étant paire, on obtient :

$$\begin{aligned} F[e^{-a|x|}] &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(2\mathbf{p}ux) dx = 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{i2\mathbf{p}ux} dx \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a - i2\mathbf{p}u} \right) = \frac{2a}{a^2 + 4\mathbf{p}^2 u^2} = \frac{1}{\mathbf{p}} \frac{\frac{a}{2\mathbf{p}}}{\left(\frac{a}{2\mathbf{p}}\right)^2 + u^2} \end{aligned}$$

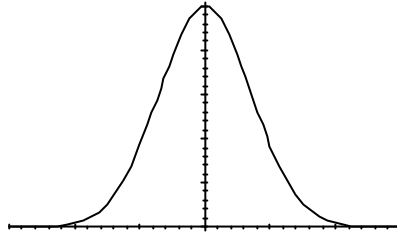
D'où, en utilisant la propriété $F[F[f]](x) = f(-x)$, et en posant $|b| = \frac{a}{2\mathbf{p}}$:

$$F\left[\frac{1}{\mathbf{p}b^2 + x^2}\right] = e^{-a|u|}$$

soit :

$$\boxed{F\left[\frac{1}{b^2 + x^2}\right] = \frac{\mathbf{p}}{|b|} e^{-2\mathbf{p}|b||u|}}$$

5°- La Gaussienne



La Gaussienne est la fonction $f(x) = e^{-b^2 x^2}$ avec b réel. Elle décrit notamment le spectre de la lumière émise par une lampe spectrale basse pression.

On peut calculer sa T.F. en passant par la fonction $e^{-b^2 z^2}$ de la variable complexe z . On peut aussi utiliser la méthode suivante mettant en évidence l'utilisation possible de la T.F. pour la résolution d'équations différentielles :

Comme $f'(x) = -2b^2 x f(x)$

et que $F[xf] = -\frac{1}{i2\mathbf{p}} F'(u)$ et $F[f'] = 2i\mathbf{p}u F[f]$

F vérifie $2i\mathbf{p}uF = 2b^2 \frac{F'}{2i\mathbf{p}}$ soit $F' + \frac{2\mathbf{p}^2}{b^2} uF = 0$ donc

$$F(u) = F(0) e^{-\frac{\mathbf{p}^2 u^2}{b^2}}$$

Enfin, $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\mathbf{p}}}{|b|}$.

On obtient:
$$F[e^{-b^2 x^2}] = \frac{\sqrt{p}}{|b|} e^{-\frac{p^2 u^2}{b^2}}$$

☞ La TF d'une Gaussienne est une Gaussienne.

6°- La fonction \mathbf{d} de Dirac

On a défini la fonction \mathbf{d} de Dirac par :

$$\mathbf{d}(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \operatorname{sinc}(pXx)$$

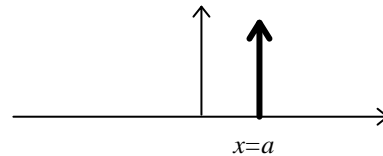
On peut aussi utiliser d'autres définitions:
$$\mathbf{d}(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \operatorname{rect} \frac{1}{X}(x)$$

ou encore :
$$\mathbf{d}(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-pX^2 x^2}$$

Ces différentes définitions conduisent aux mêmes propriétés:

• \mathbf{d} est nulle partout sauf en $x=0$
où elle vaut $+\infty$

• $\mathbf{d}(x-a)$ est nulle partout sauf en
 $x=a$ où elle vaut $+\infty$



• $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(x) dx = 1$ et plus généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(x-a) f(x) dx = f(a) \quad (\text{sifting property})$$

• $\mathbf{d}(ax) = \frac{1}{|a|} \mathbf{d}(x)$

• $F[\mathbf{d}] = 1$ et $F[2ip\mathbf{d}(x-a)] = e^{-2ipau}$

- $F[e^{2ip_0x}] = \mathbf{d}(u - u_0)$
- $F[\cos(2p_0x)] = \frac{1}{2}(\mathbf{d}(u - u_0) + \mathbf{d}(u + u_0))$
- $F[\sin(2p_0x)] = \frac{1}{2i}(\mathbf{d}(u - u_0) - \mathbf{d}(u + u_0))$

\mathbf{d} n'est pas une fonction au sens usuel, et la description correcte de cet objet nécessite la théorie des distributions. Dirac utilisa et vulgarisa cet outil dès 1930, mais ce n'est qu'en 1950 que la théorie fut présentée (Schwartz). Signalons simplement que $\mathbf{d}(x - a)$ est la *distribution singulière* qui à une fonction f continue en a associe le réel $f(a)$. On note: $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$, ce que l'on écrit en physique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(x - a) f(x) dx = f(a)$$

Montrons l'utilité de cet outil pour montrer par exemple que :

$$F[F[f]](x) = f(-x)$$

$$F[f](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i2p\mathbf{x}u} d\mathbf{x} = F(u)$$

$$F[F](x) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-i2p\mathbf{x}u} du = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbf{x}=-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i2p\mathbf{x}u} d\mathbf{x} \right) e^{-i2p\mathbf{x}u} du$$

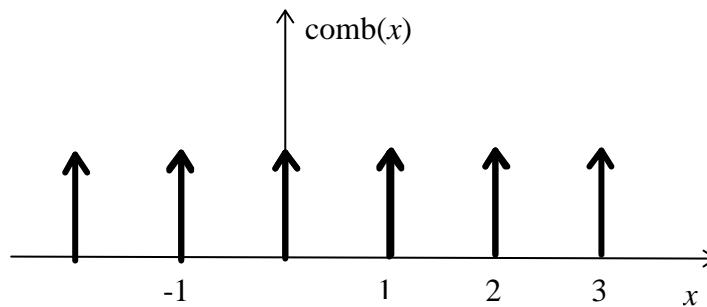
$$= \int_{\mathbf{x}=-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \left(\int_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-i2p\mathbf{x}u} du \right) d\mathbf{x}$$

$$= \int_{\mathbf{x}=-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \mathbf{d}(\mathbf{x} + x) d\mathbf{x} = f(-x)$$

7°- Le peigne de Dirac

Le peigne (*comb* en anglais) est la fonction :

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(x - n)$$

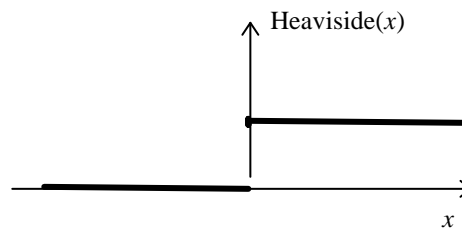


La représentation de cette fonction justifie son appellation: il s'agit de pic de Dirac régulièrement espacés (le pas est 1). On peut modifier le pas en considérant la fonction $\text{comb}\left(\frac{x}{a}\right)$ de pas a .

On montre que la TF du peigne est encore un peigne :

$$\mathbb{F}[\text{comb}(x)](u) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathbf{d}(u - q) = \text{comb}(u)$$

8°- La fonction de Heaviside



$$\text{Elle est définie par: Heaviside}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comme $\text{Heaviside}(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{signe}(x))$, on obtient :

$$\mathbb{F} [\text{Heaviside}(x)](u) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{d}(u) + \frac{1}{i\mathbf{p}u} \right)$$

IV Transformée de Fourier et Convolution

1°- Produit de convolution

Soient $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. On définit sous réserve d'existence :

$$(f * g)(x) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$$

La fonction $f * g$ est appelée *convoluée de f et g*. Elle existe notamment lorsque :

- f et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$
- $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g bornée

2°- Propriétés

- La convolution est *commutative* dans $L^1(\mathbb{R})$: $f * g = g * f$

(Il suffit de faire le changement de variables $u=x-t$)

- La convolution est *associative* dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

- La convolution est *distributive* par rapport à l'addition dans $L^1(\mathbb{R})$:

$$f * (g+h) = f * g + f * h$$

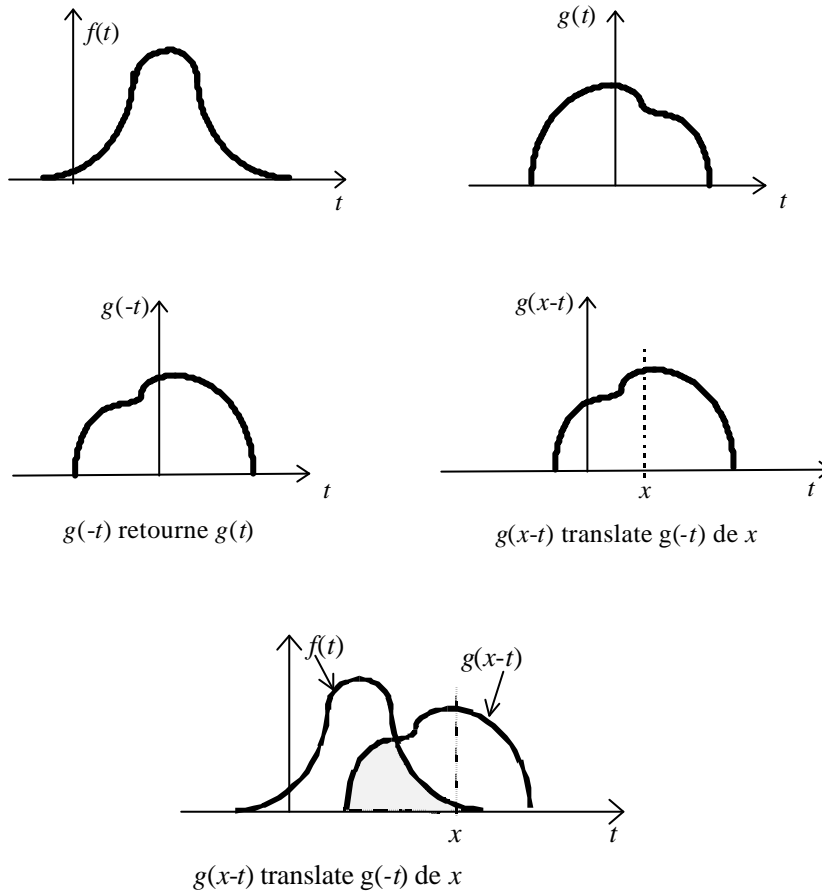
- Dérivation: si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et si f ou g de classe C^1 sur \mathbb{R} , alors $f * g$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et :

$$(f * g)' = f' * g = f * g'$$

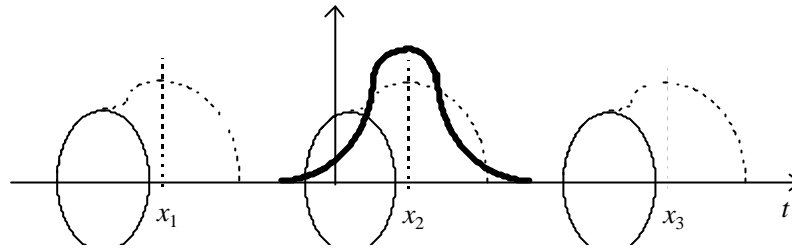
- Translation: $(f * g)(x-a) = f(x-a) * g = f * g(x-a)$

3°- Interprétation graphique du produit de convolution

Soient deux fonctions f et g réelles



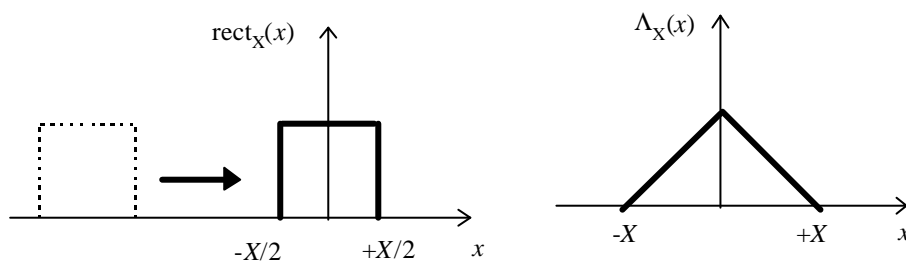
A x fixé, $\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ permet de voir le *recouvrement* de $f(t)$ avec $g(x-t)$



En faisant varier x , on déplace la courbe $g(x-t)$ par rapport à la courbe $f(t)$. Pour chaque valeur de x , $(f*g)(x)$ chiffre le recouvrement des deux fonctions.

Qualitativement, on peut conclure que $f*g$ sera nulle en x_1 , va croître jusqu'en x_2 , puis décroître pour s'annuler en x_3 .

Exemple: la convolution de la fonction rectangle avec elle même donne la fonction triangle :



4°- Théorème de convolution

Dans $L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier :

$$\boxed{F[f*g] = F[f]F[g]}$$

$$F[f * g](u)$$

$$= \int_{x=-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i2\mathbf{p}xu} dx = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \right) e^{-i2\mathbf{p}xu} dx$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) e^{-i2\mathbf{p}xu} dx dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x-t) e^{-i2\mathbf{p}xu} dx \right) dt$$

(théorème de Fubini)

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i2\mathbf{p}(t+y)u} dy \right) dt$$

(changement de variable $y=x-t$)

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i2\mathbf{p}tu} e^{-i2\mathbf{p}yu} dy \right) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}tu} \left(\int_{y=-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-i2\mathbf{p}yu} dy \right) dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}tu} F[g](u) dt$$

$$= F[g](u) \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\mathbf{p}tu} dt$$

$$= F[f](u) F[g](u)$$

5°- Exemples

$$\bullet \quad \mathbb{F}[\text{rect}_X * \text{rect}_X] = \mathbb{F}[\text{rect}_X] \mathbb{F}[\text{rect}_X] = (\text{Xsinc}(\mathbf{p}xu))^2 = \mathbb{F}[\Lambda_X]$$

$$\text{donc} \quad \Lambda_X = \text{rect}_X * \text{rect}_X$$

- $f(x) * \mathbf{d}(x) = f(x)$ on dégage ici une propriété fondamentale de \mathbf{d} : c'est « l'élément neutre » du produit de convolution.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x) * \text{comb}\left(\frac{x}{a}\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x) * \mathbf{d}\left(\frac{x}{a} - n\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x) * \mathbf{d}\left(\frac{x - na}{a}\right) = |a| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x) * \mathbf{d}(x - na) \\ &= |a| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - na) * \mathbf{d}(x) = |a| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - na) \end{aligned}$$

Cette opération permet de représenter mathématiquement un *échantillonnage* de la fonction f , abondamment utilisé en traitement numérique des signaux

V Les systèmes linéaires

1°- Définition

Soit un dispositif permettant de traiter une information $f_e(x)$ pour fournir en sortie une réponse $g_s(X)$.

Le système est *linéaire* lorsque la réponse $g_s(X)$ dépend linéairement de l'entrée $f_e(x)$:

$$g_s(X) = L[f_e(x)]$$

L est un opérateur linéaire :

$$L [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] = a_1 L [f_1(x)] + a_2 L [f_2(x)].$$

Dans ces conditions, la sortie sera la superposition linéaire des différentes composantes de l'entrée.

En optique, l'information f_e est un objet lumineux. f_e représente l'amplitude du champ électrique en chaque point (x,y) de l'objet; f_e est ainsi une fonction de deux variables (coordonnées des points de l'objet). g_s est l'amplitude du champ électrique en chaque point (X,Y) d'un plan d'observation (écran, cellule CCD, etc.)

- si les différents points de l'objet émettent des vibrations cohérentes entre elles, g_s dépend linéairement de $f_e(x,y)$
- si les différents points de l'objet émettent des vibrations incohérentes, g_s dépend non plus de $f_e(x,y)$ mais de $|f_e(x,y)|^2$. Le système reste néanmoins linéaire.

Dans les deux cas, la grandeur physique captée en sortie est proportionnelle à $|g_s(X,Y)|^2$ (intensité lumineuse)

En électronique, le problème est à la fois plus simple car unidimensionnel (1 variable temporelle), mais aussi plus complexe car la variable de sortie est la même que la variable d'entrée.

Nous décrivons ici des grandeurs d'entrée et de sortie unidimensionnelles avec des variables différentes $f_e(x)$ et $g_s(X)$...

Les systèmes non linéaires:

Dans un système linéaire, la forme de la réponse sortie est connue dès que l'entrée est connue.

Dans un système non linéaire (diodes, hystérésis, etc.), le système peut avoir un comportement chaotique imprévisible.

Considérons par exemple un système non linéaire tel que $g_s(X) = \text{signe}(f_e(x))$. Le système va présenter un comportement chaotique si $f_e(x)$ varie aléatoirement autour de zéro, même dans un petit domaine.

2°- Réponse impulsionnelle d'un système linéaire

Soit un système linéaire décrit par un opérateur \mathcal{L} :

$$g_s(X) = \mathcal{L}[f_e(x)]$$

On utilise la fonction \mathbf{d} de Dirac pour décomposer $f_e(x)$ en une somme de différentes composantes :

$$f_e(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}(x - \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\text{Donc } g_s(X) = \mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x}) \mathbf{d}(x - \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x}) \mathcal{L} [\mathbf{d}(x - \mathbf{x})] d\mathbf{x}$$

$h(\mathbf{x}, X) = \mathcal{L} [\mathbf{d}(x - \mathbf{x})]$ est la *réponse impulsionnelle* du système.

$h(\mathbf{x}, x)$ est la réponse du système à une source *ponctuelle* placée en $x = \mathbf{x}$. Si la variable d'entrée est temporelle, la source ponctuelle est une impulsion infiniment brève.

Dès lors, g_s s'exprime selon: $g_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}, x) d\mathbf{x}$, relation qui

montre que la réponse à une excitation quelconque est la superposition linéaire des différentes contributions de l'excitation.

On remarque aussi que la réponse impulsionnelle d'un système linéaire le caractérise complètement.

3°- Systèmes linéaires invariants, fonction de transfert

Un système linéaire est dit *invariant* lorsqu'une translation en entrée se traduit par une translation en sortie, sans affecter la forme de la sortie.

Un tel système a sa réponse impulsionnelle qui ne dépend que de $X-\mathbf{x}$: $h = h(X-\mathbf{x})$

Par exemple, une impulsion envoyée sur un système électronique à un instant t_0 produira une réponse à un instant ultérieur t_1 avec t_1-t_0 indépendant de t_0 .

Pour un système optique, une translation de l'objet se traduit par une translation de la figure observée.

Pour de nombreux systèmes réels, cette propriété sera vérifiée, au moins localement.

La sortie du système linéaire invariant est dans ces conditions donnée par :

$$g_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x})h(X-\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

soit

$$\boxed{g_s(X) = (f_e * h)(X)}$$

+ La réponse d'un système linéaire invariant est la convoluée de l'entrée avec la réponse impulsionnelle.

Si on s'intéresse à la composition spectrale des signaux, on applique la transformée de Fourier et on obtient :

$$\boxed{G_S = F_E \times H}$$

$$\text{où } G_S = F[g_s] \quad F_E = F[f_e] \quad \text{et} \quad H = F[h]$$

$H = F[h]$ s'appelle la *fonction de transfert* du système linéaire invariant.

+ Le spectre de la sortie s'obtient en multipliant le spectre de l'entrée avec la fonction de transfert H du système linéaire invariant.

Exemple : Considérons en électronique un filtre passe bas du premier ordre fondamental. Sa fonction de transfert est :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega t}$$

la réponse impulsionnelle est $v_s(t) = \mathcal{F}^{-1}[H] = \frac{1}{t} e^{-\frac{t}{t}}$

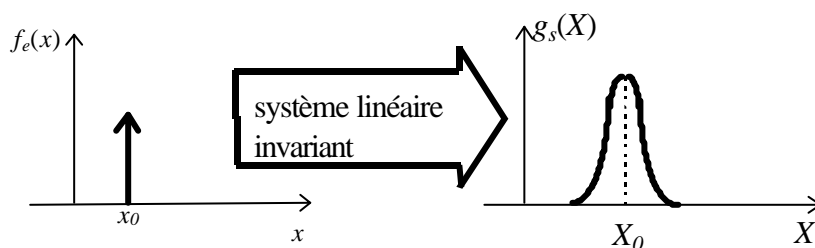
4°- Interprétation physique du produit de convolution

Reprenons le cas d'un système linéaire invariant. La réponse en sortie est la convoluée de l'entrée avec la réponse impulsionnelle :

$$g_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(\mathbf{x}) h(X - \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Supposons que l'entrée soit constituée d'un point source situé en $x=x_0$. Alors $f_e(x) = \delta(x-x_0)$ et donc :

$$g_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x} - x_0) h(X - \mathbf{x}) d\mathbf{x} = h(X - x_0)$$



+ h caractérise donc aussi l'étalement d'une impulsion ponctuelle à travers le système .

Soit maintenant une entrée quelconque décrite par $f_e(x)$. $f_e(x_0)dx_0$ peut être considérée comme une partie ponctuelle de l'entrée dont la réponse par le système est donnée par $f_e(x_0) dx_0 h(X-x_0)$.

Chaque point de l'entrée peut être traité de la même manière et la sortie est la superposition de toutes les composantes. Cette superposition s'écrit :

$$g_s(X) = \int_{x_0=-\infty}^{+\infty} f_e(x_0)h(X-x_0)dx_0$$

ce qui consiste précisément à faire la convolution de f_e avec h .

Notons au passage que l'étalement des différentes composantes de l'entrée va altérer le signal: il va y avoir une perte d'information entre l'entrée et la sortie. L'exemple ci-dessous montre une entrée constituée de deux pics rapprochés alors que la sortie ne montre qu'un seul pic.

