Chapitre XI : Séries et transformées de Fourier

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- donner l'intérêt de la décomposition en séries de Fourier d'une fonction
- calculer la décomposition en série de Fourier d'une fonction
- interpréter le spectre de Fourier d'une fonction
- interpréter physiquement la transformée de Fourier d'une fonction
- de définir la largeur spectrale d'un signal

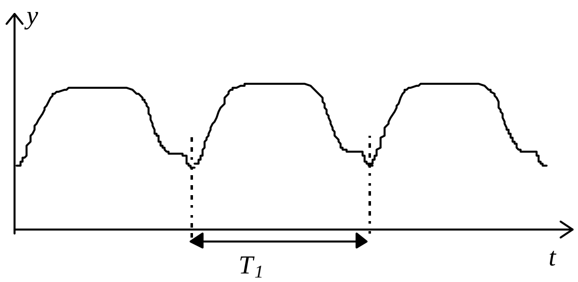
En physique, on s'intéresse souvent à la réponse du système étudié vis à vis d'une *excitation sinusoïdale*. Cette réponse est dans de nombreux cas elle-même *sinusoïdale* (par exemple, dans le cas d'un circuit R L C série en régime sinusoïdal forcé).

Intérêt : une telle étude permet en fait de comprendre le comportement d'un système *linéaire* vis à vis d'une *excitation quelconque*. Cette excitation peut en effet se décomposer en une *somme d'excitations sinusoïdales*. La réponse d'un système linéaire est alors la somme des réponses sinusoïdales (théorème de superposition)

Les systèmes linéaires se rencontrent dans de nombreux domaines de la Physique (électronique, optique, électromagnétisme, mécanique, etc.). Un système physique est linéaire si, lorsqu'il fournit la réponse S_1 à une excitation E_1 et une réponse S_2 à une excitation E_2, la réponse fournie à $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$ est $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$.

I Cas des fonctions périodiques: Séries de Fourier

1°- Décomposition en séries de Fourier d'une fonction periodique



Soit $y = f(t)$ une fonction périodique de période T_1, de pulsation $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1}$ et de fréquence $\nu_1 = \dfrac{1}{T_1}$ (le paramètre temporel est le plus fréquemment rencontré, mais la théorie s'applique à d'autres cas).

Dans certaines conditions peu restrictives en physique, f peut s'écrire:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)\right]}$$

La pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ s'appelle la *pulsation fondamentale*.

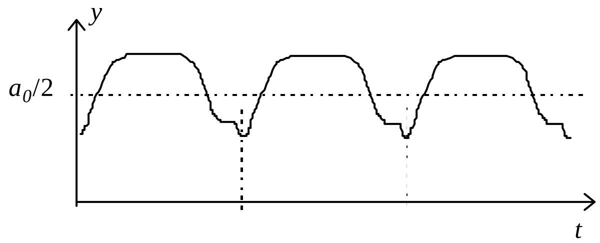
Les pulsations $\omega_n = n\,\omega_1$ s'appellent les *harmoniques de rang n*.

Les coefficients a_n et b_n sont les *coefficients de Fourier de la fonction f*.

Remarque : La théorie ne s'applique pas exclusivement aux fonctions périodiques: il est toujours possible de définir une série de Fourier convergeant vers une fonction f, même non périodique, sur un intervalle T_1.

En Physique, la théorie des séries de Fourier est principalement appliquée aux fonctions périodiques ou aux fonctions définies dans un intervalle donné.

2°- Calcul et interprétation des coefficients de Fourier



On montre que:

- $\frac{a_0}{2}$ représente la *valeur moyenne* de f sur une période T_1 :

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\,dt}$$ où t_0 est quelconque

- $\boxed{a_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt}$ $\boxed{b_n = \dfrac{2}{T_1}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt}$

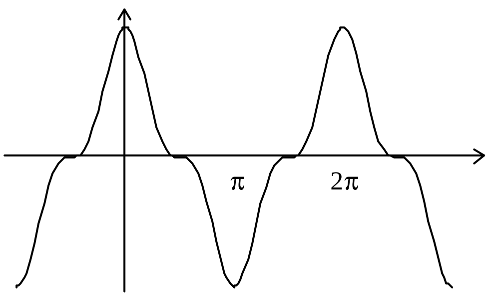
Les coefficients a_n et b_n quantifient la participation de l'harmonique de rang n à la fonction f; autrement dit, dès qu'un coefficient de rang n est non nul, cela signifie qu'une partie de la fonction f vibre à la pulsation $n\omega_1$

<u>*Remarques*</u>: ① Si f est paire, la partie impaire du développement est nulle: $\forall\, n\ \ b_n=0$

② Si f est impaire, la partie paire du développement est nulle: $\forall\, n\ \ a_n=0$

③ Si f est de valeur moyenne nulle, alors $a_0=0$

Exemple: Soit $f(t) = \cos^3 t$ à décomposer en séries de Fourier



La fonction est paire et de valeur moyenne nulle, donc $a_0=0$ et $\forall\, n$ $b_n=0$. On peut calculer les coefficients a_n à l'aide de la formule, mais dans cet exemple on peut linéariser f en utilisant la formule d'Euler: $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, donc

$$f(t) = \cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3it}+e^{-3it}+3e^{it}+3e^{-3it}\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$$

et $a_1 = \dfrac{3}{4}$ $a_2 = 0$ $a_3 = \dfrac{1}{4}$ $\forall\ n > 3,\ a_n = 0$: seule l'harmonique de rang 3 est non nulle

3°- Spectre de Fourier d'une fonction périodique

La décomposition en séries de Fourier de la fonction f peut aussi s'écrire:

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)\right]}$$

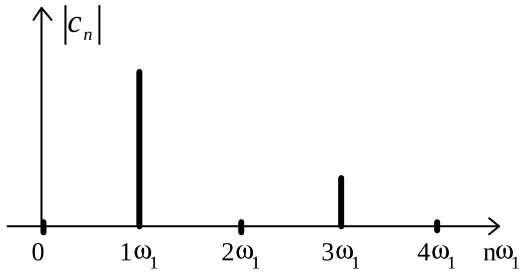
avec $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\cos\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \qquad \sin\varphi_n = -\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$$

c_n est *l'amplitude de l'harmonique de rang n* et φ_n est sa *phase*.

Le *spectre de Fourier* de la fonction f est le diagramme obtenu en portant sur un axe horizontal gradué en multiples de la pulsation fondamentale ω_1 des segments de longueur proportionnelle à l'amplitude c_n de l'harmonique considérée.

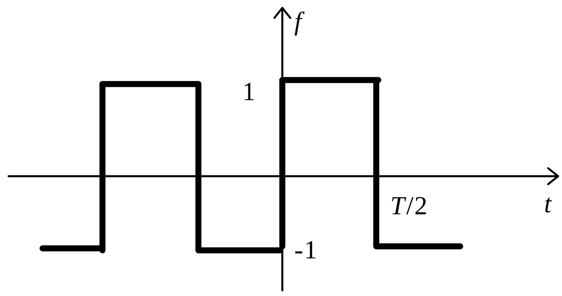
Le spectre montre immédiatement l'importance relative des différentes harmoniques.



Exemple: spectre de la fonction $f(t) = \cos^3 t$

4°- Exemples de décompositions en séries de Fourier

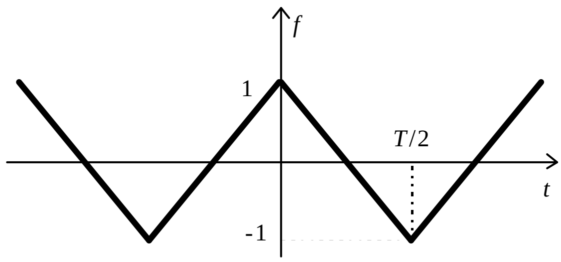
a) fonction "signal carré"



tous les a_n sont nuls (f impaire) ; $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right]$$

b) fonction "signal triangulaire"

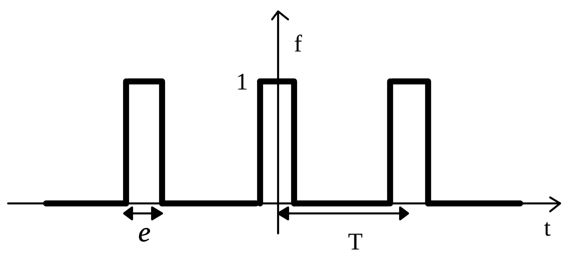


$a_0 = 0$ (valeur moyenne nulle) ; tous les b_n sont nuls (f paire)

$$a_{2p} = 0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{4}{\left[(2p+1)\boldsymbol{p}\right]^2}$$

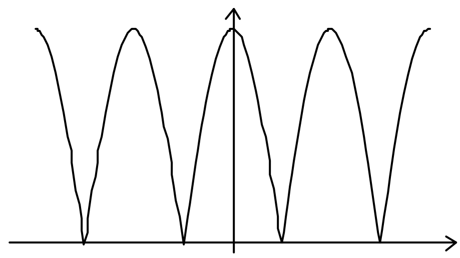
$$f(t) = \frac{8}{\boldsymbol{p}^2}\left[\cos(\boldsymbol{w}t) + \frac{\cos(3\boldsymbol{w}t)}{3^2} + \frac{\cos(5\boldsymbol{w}t)}{5^2} + \dots\right]$$

c) fonction "impulsion récurrente"



$$f(t) = \frac{\boldsymbol{e}}{T} + \frac{2\boldsymbol{e}}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\boldsymbol{pe}}{T}}{\frac{n\boldsymbol{pe}}{T}}\cos(n\boldsymbol{w}t)$$

d) redressement double alternance



$f(t) = |\cos(\boldsymbol{w}t)|$

$$f(t) = \frac{2}{\boldsymbol{p}} - \frac{4}{\boldsymbol{p}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n\boldsymbol{w}t)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Exercice: représenter les spectres de Fourier des fonctions ci-dessus.

5°- Décroissance des coefficients de Fourier

Qualitativement, plus une fonction f est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent à l'infini :

$$c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(le contrôler sur les exemples précédents)

Ce résultat a en physique une grande importance pratique : pour avoir une bonne approximation de la fonction f, il suffira souvent de calculer les premiers termes du développement.

6°- Notation complexe de la décomposition

Si f est périodique de période T_1, on a vu que:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)\right]$$

or $\cos(n\omega_1 t) = \dfrac{e^{in\omega_1 t} + e^{-in\omega_1 t}}{2}$ et $\sin(n\omega_1 t) = \dfrac{e^{in\omega_1 t} - e^{-in\omega_1 t}}{2i}$

d'où $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{in\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-in\omega_1 t}$$

Posons $$\underline{C}_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt - \frac{2i}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-in\omega_1 t}dt$$

et remarquons que

$$\frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt + \frac{2i}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{+in\omega_1 t}dt = \underline{C}_{-n}$$

Alors $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\underline{C}_n e^{in\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\underline{C}_{-n} e^{-in\omega_1 t}$ et en faisant varier n de $-\infty$ à $+\infty$, on peut regrouper les deux sommes:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underline{C}_n e^{in\omega_1 t}} \quad \text{où on a} \quad \boxed{\underline{C}_n = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{-in\omega_1 t}dt}$$

Remarques: ① La formule donnant $\underline{C}_n$ est également valable pour $\underline{C}_0 = a_0/2$

② On passe facilement de la notation complexe à la notation réelle en remarquant que :

$$\begin{cases}\underline{C}_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ \underline{C}_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}\end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases}a_n = (\underline{C}_n + \underline{C}_{-n}) \\ b_n = i(\underline{C}_n - \underline{C}_{-n})\end{cases}$$

③ Si $f(t)$ est à valeurs réelles, alors

$$\underline{C}_{-n} = \frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)e^{+in\omega_1 t}dt = \overline{\underline{C}_n}\,,$$

de sorte que a_n et b_n sont donnés par : $\begin{cases}a_n = 2\,\mathrm{Re}(\underline{C}_n) \\ b_n = -2\,\mathrm{Im}(\underline{C}_n)\end{cases}$

④ Si $f(t)$ est à valeur réelle, l'amplitude de l'harmonique de rang n est :

$$c_n = 2\left|\underline{C}_n\right|$$

la phase de l'harmonique de rang n est :

$$\varphi_n = \arg(\underline{C}_n)$$

⑤ Les « pulsations négatives » qui apparaissent dans le calcul servent simplement à reconstituer $f(t)$ à partir d'une somme de complexes. Dans le cas où la fonction sinusoïdale décrit un phénomène de propagation unidimensionnel (par exemple selon un axe des x), les deux signes traduisent les deux sens possibles de propagation (selon les x croissants ou décroissants).

7°- Egalité de Parseval

Considérons un phénomène physique périodique décrit par $f(t)$. L'énergie moyenne associée à ce phénomène fait intervenir le carré de f (le vérifier si f est une tension par exemple). L'énergie moyenne sur une période est donc proportionnelle à : $\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f^2(t)dt$.

L'égalité de Parseval exprime que cette énergie est *répartie sur toutes les harmoniques* du phénomène :

$$\boxed{\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f^2(t)dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2}$$

où c_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n

Montrons cette propriété en évaluant dans le cas général où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ l'intégrale: $\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\overline{f}(t)dt$

Comme $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \, e^{inw_1 t}$, on obtient :

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\overline{f}(t)dt = \frac{1}{T_1}\int_{T_1}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \, e^{inw_1 t}\right)\overline{f}(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \int_{T_1} \overline{f}(t)\, e^{inw_1 t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \overline{\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\, e^{-inw_1 t} dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \overline{\underline{C}_n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\underline{C}_n\right|^2$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\left|\underline{C}_n\right| = \left|\underline{C}_{-n}\right|$ et on obtient l'égalité de Parseval en rassemblant la sommation sur les indices négatifs et celle sur les indices positifs:

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\overline{f}(t)dt = \left|\underline{C}_0\right|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|\underline{C}_n\right|^2 + \sum_{n=+1}^{+\infty}\left|\underline{C}_n\right|^2$$

$$= \left|\underline{C}_0\right|^2 + 2\sum_{n=+1}^{+\infty}\left|\underline{C}_n\right|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=+1}^{+\infty} c_n^2$$

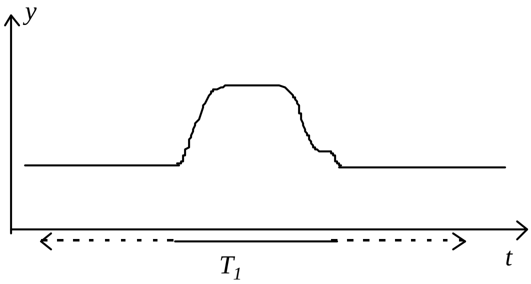
Exemple: $$\frac{1}{2p}\int_{2p} \cos^6 t \, dt = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{5}{16}$$

Remarque: l'égalité de Parseval est plus belle en utilisant la forme complexe de la décomposition:

$$\boxed{\frac{1}{T_1}\int_{T_1} f(t)\overline{f}(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\underline{C}_n\right|^2}$$

II Cas d'une fonction non périodique: Transformée de Fourier

1°- Contenu sinusoïdal d'une fonction non périodique



On veut transposer la théorie précédente au cas d'une fonction $y = f(t)$ non périodique. Cela est possible à condition de prendre T_1 très grande. La pulsation fondamentale ω_1 est alors *très faible* et les harmoniques $n\omega_1$ sont *très rapprochées*.

En utilisant la notation complexe: $$\underline{C}_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\, e^{-in\omega_1 t}\, dt$$

Soit maintenant une pulsation quelconque ω. Comme ω_1 est très faible, il est possible de trouver un entier n tel que $n\omega_1 \cong \omega$. On a alors: $$\underline{C}_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

D'où la conclusion qualitative importante obtenue en faisant tendre T_1 vers $+\infty$:

☞ *l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ *est proportionnelle à la partie sinusoïdale de pulsation* ω *de la fonction f.*

2°- Transformée de Fourier d'une fonction

On définit la transformée de Fourier d'une fonction f par:

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iwt}\, dt}$$

$F(w)\, dw$ est proportionnelle à la partie sinusoï dale de la fonction f de pulsation comprise entre w et $w+dw$. $F(w)$ est une "*densité d'amplitude*".

Tout comme pour les séries de Fourier, on recompose la fonction f par sommation de toutes les harmoniques :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{+iwt}\, dw}$$

L'*amplitude spectrale* de la fonction f est la représentation de $|F(w)|$ en fonction de w. Cette courbe montre le "contenu vibratoire" de la fonction f.

Remarques: ① c'est pour avoir une symétrie entre la fonction f et sa transformée de Fourier f que le facteur $\frac{1}{\sqrt{2p}}$ est introduit.

② Dans le calcul de $F(w)$, on considère des pulsations *négatives*. Seules les pulsations positives ont une signification physique, mais les valeurs négatives servent à reconstituer des valeurs réelles pour la fonction f. En effet, si f est réelle :

$$F(-w) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{+iwt}\, dt = \overline{F(w)}$$

et donc: $$\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\, e^{+iwt}\, dw = \int_{0}^{+\infty} F(w)\, e^{+iwt}\, dw + \int_{-\infty}^{0} F(w) e^{+iwt}\, dw$$

$$= \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{+i\omega t}\, d\omega - \int_{+\infty}^{0} F(\omega')\, e^{-i\omega' t}\, d\omega' \quad (\omega'=-\omega)$$

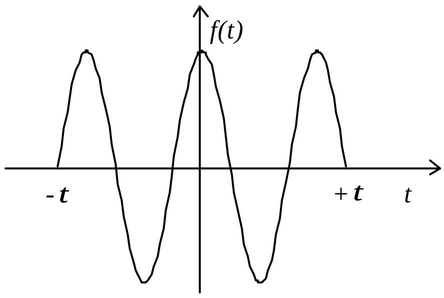
$$= \int_0^{+\infty} \left(F(\omega)\, e^{+i\omega t} + \overline{F(\omega) e^{+i\omega t}} \right) d\omega$$

où cette dernière quantité appartient à ℝ

③ Si la convergence de l'intégrale définissant $F(\omega)$ présente des problèmes, les distributions (non décrites ici) permettent de contourner la difficulté.

3°- Exemple du train d'onde

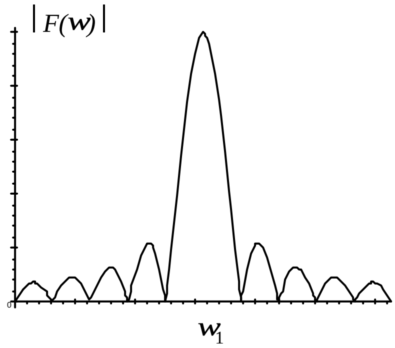
Un train d'onde est caractérisé par une fonction sinusoïdale limitée dans le temps :



$$\begin{cases} f(t) = \cos(\omega_1 t) \text{ entre } t_1 \text{ et } t_2 \\ f(t) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

En prenant $t_2 = -t_1 = \boldsymbol{t}$, on trouve en calculant la transformée de Fourier :

$$F(w) = \frac{\boldsymbol{t}}{\sqrt{2p}}\left[-\frac{\sin(w+w_1)\boldsymbol{t}}{(w+w_1)\boldsymbol{t}} + \frac{\sin(w-w_1)\boldsymbol{t}}{(w-w_1)\boldsymbol{t}}\right]$$



L'amplitude spectrale est représentée ci-contre. On constate que :

① f contient *essentiellement* des vibrations centrées autour de w_1, mais que le contenu sinusoïdal d'un train d'onde est *très différent* de celui d'une sinusoïde de pure infinie: *un train d'onde ne peut donc pas être considéré comme purement monochromatique !*

② les pulsations qui composent f sont en majeure partie centrées autour de w_1 et comprises entre les deux premiers zéros de $|F(w)|$ encadrant w_1. Ces deux zéros sont donnés, en négligeant le terme $\frac{\sin(w+w_1)\boldsymbol{t}}{(w+w_1)\boldsymbol{t}}$ lorsque w est voisin de w_1, par: $(w-w_1)\boldsymbol{t} = \pm p$,

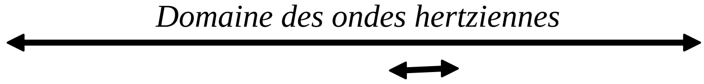
soit $w = w_1 \pm \frac{p}{\boldsymbol{t}}$

La largeur spectrale Dw est alors: $Dw = \frac{2p}{\boldsymbol{t}}$ soit $\boxed{\Delta w \cdot \boldsymbol{t} = 2p}$

☞ *On dégage là une propriété essentielle des signaux de durée limitée: si* $\boldsymbol{t}$ *est la durée caractéristique d'un signal, alors sa largeur spectrale* Dw *vérifie:* $Dw \times \boldsymbol{t}$ *= cte où la cte est voisine de l'unité.*

Autrement dit, plus l'extension temporelle d'un signal est grande, plus sa pulsation est déterminée avec précision; ceci constitue un des aspects du principe d'incertitude.

Exemple : transmission des signaux TV dans le standard "625 lignes"



L'écran est constitué de 625 lignes, elles mêmes composées de 360 points. L'état de chaque point (teinte) doit être précisé 25 fois par seconde. La durée du signal qui règle la teinte d'un point est de l'ordre de: $\tau = 1/(25 \times 625 \times 360) = 1/(5{,}6.10^6)$ seconde.

Dans ces conditions, le signal occupe une bande de fréquence de l'ordre de :

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\text{cte}}{2\pi\tau} \cong \text{ quelques mégahertz}$$

Pour les signaux TV véhiculés par des ondes hertziennes c'est à dire dans le domaine de la centaine de mégahertz, on ne peut recevoir qu'un nombre assez limité de "canaux" (voir figure). Par contre, en utilisant les fibres optiques, les ondes utilisées ont une fréquence de l'ordre de 10^{15} Hz et, puisque la bande de fréquence occupée reste constante, le nombre de canaux transportables est très important.

4°- Une autre définition de la transformée de Fourier

Si on s'intéresse plus à la composition en fréquence ν d'un signal plutôt qu'à sa composition en pulsation ω ($\omega = 2\pi\nu$), on définit la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse par :

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt} \qquad \boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{+i2\pi\nu t}\, d\omega}$$

Exercices : Séries de Fourier

Coefficients de la décomposition en série de Fourier

A partir de la notation complexe de la décomposition en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n \, e^{in\omega_1 t}$$

1. Montrer que nécessairement: $\underline{C}_n = \dfrac{1}{T_1} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} f(t)\, e^{-in\omega_1 t} dt$

2. En déduire l'expression des coefficient a_n et b_n de la notation réelle de la décomposition en fonction de $f(t)$.

Décomposition en séries de Fourier

Décomposer en séries de Fourier $f(t) = \sin^3 t$ sans utiliser les formules donnant les coefficients.

Vérifier à l'aide des formules les valeurs des coefficients non nuls.

Réponse: f(t) = 3/4 sin t - 1/4 sin 3t

Vibration quasi monochromatique à trois composantes spectrales

Une vibration quasi monochromatique $f(t)$ peut être considérée comme la somme de trois vibrations monochromatiques $f_0(t)$, $f_1(t)$ et $f_2(t)$, d'amplitudes respectives A_0, $A_1=A_2=A_0/2$ et de fréquences respectives ν_0, $\nu_1=\nu_0-\Delta\nu/2$ et $\nu_2=\nu_0+\Delta\nu/2$ avec $\Delta\nu \ll \nu_0$

Montrer que *f(t)* est une vibration dont l'amplitude varie lentement avec le temps (modulation d'amplitude). Donner la fréquence de modulation et l'allure de *f(t)*.

Réponse: $f(t) = A_0 [1 + \cos \pi\Delta\nu t] \cos 2\pi\nu_0 t$

Décomposition d'un signal exponentiel périodique

Soit f un signal périodique de période $2a$ défini par: $f(t) = e^t$ sur $]-a,a[$, $f(a)=b$

1. Représenter f sur $[-3a,a]$
2. Décomposer f en série de Fourier en utilisant les complexes.
3. Quelle relation doit relier b et a pour que la série précédente converge vers f pour tout t ?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$

Réponses:

2. $S(t)= \dfrac{sh(a)}{a}\left[1+\sum_{1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{1+(n\omega)^2}\left(\cos(n\omega t)-n\omega\sin(n\omega t)\right)\right]$

3. $b=ch(a)$ 4° - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{th(\pi)}-1\right)$

Signal sinusoïdal écrêté

On considère un signal sinusoïdal $v_e(t)=V_0\cos(\omega t)$. Ce signal passe à travers un dispositif dont le seul effet est de l'écrêter lorsque $|v_e(t)|>V_2$ avec $V_2<V_1$ (on pose $V_2=V_1\cos\theta_0$). On obtient un signal $v_s(t)$.

1. Représenter $v_s(t)$

2. Calculer l'amplitude A_1 du fondamental de la décomposition en série de Fourier de $v_s(t)$ en fonction de V_2 et de θ_0

Réponse: $$A_1 = \frac{2V_2}{\pi}\left[\frac{\frac{\pi}{2}-\theta_0}{\cos(\theta_0)}+\sin(\theta_0)\right]$$

Conception d'un filtre

On considère un signal carré impair d'amplitude unité.

1. Donner la décomposition en série de Fourier du signal
2. Donner la fonction de transfert d'un quadripôle capable de transformer ce signal en un signal sinusoïdal pur d'amplitude unité et de fréquence 5 fois supérieure à celle du signal carré.
3. Quel est l'action de ce filtre sur un signal carré pair d'amplitude unité ?

Redressement simple alternance

1. Représenter un signal sinusoïdal pair redressé à l'aide d'une diode sans seuil.
2. Calculer sa décomposition en série de Fourier.
3. Représenter la somme des 6 premières harmoniques.

Réponse:

2°- $$a_0 = \frac{2}{\pi}; a_1 = \frac{1}{2}; \textit{pour } p \neq 1, a_{2p+1} = 0, a_{2p} = -\frac{2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)}$$

Exercice : Transformée de Fourier

Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire

On considère la fonction impulsion rectangulaire définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \; si \; t \in [0, \mathbf{t}] \\ f(t) = 0 \; si \; t \notin [0, \mathbf{t}] \end{cases}$$

1. Représenter *f(t)*

2. Calculer la transformée de Fourier F de f

3. Représenter le spectre de f

4. Vérifier après avoir défini la largeur de bande, la relation d'incertitude

Réponses: *1°-* $F(w) = \frac{\mathbf{t}}{\sqrt{2\mathbf{p}}} e^{-iw t/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\mathbf{wt}}{2}\right)$ *avec*

$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ *4°-* *Dw´t=2p*

Transformée de Fourier d'une sinusoï de amortie exponentiellement

On considère un signal sinusoï dal de pulsation $\mathbf{w}_1$ amorti exponentiellement avec une durée caractéristique $\mathbf{t} = 1/\mathbf{a}$:

$$\begin{cases} f(t) = Ae^{-\mathbf{a}t} \sin(\mathbf{w}_1 t) \; pour \; t \geq 0 \\ f(t) = 0 \; pour \; t < 0 \end{cases}$$

soit *f(t)*=Heaviside(*t*)× $Ae^{-at} \sin(\mathbf{w}_1 t)$

1. Calculer la transformée de Fourier *F(w)* de *f(t)*.

2. Représenter l'amplitude du spectre de *f*. Préciser en particulier:

- la valeur ω_m de ω pour laquelle $|F(\omega)|$ est maximal
- les valeurs ω_b et ω_h définissant la largeur à mi hauteur $\Delta\omega_{1/2} = \omega_h - \omega_b$ de $|F(\omega)|$ (on calculera ω_h et ω_b à l'ordre 1 en α/ω_1)

3. Montrer que le produit $\Delta\omega_{1/2} \times \tau$ est constant et interpréter le résultat.

Réponses: 1. $F(\omega) = \dfrac{A}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{\omega_1}{2i\alpha\omega + \omega_1^2 + \alpha^2 - \omega^2}$

2. $\omega_m^2 = \omega_1^2 - \alpha^2$ 3. $\Delta\omega_{1/2} \times \tau \cong 2\sqrt{3}$

Vibration quasi monochromatique triangulaire

Une vibration quasi monochromatique a pour expression réelle: $f(t) = A(t)\cos 2\pi\nu_0 t$

où $A(t)$ est la fonction triangle suivante: $\begin{cases} 1 + \dfrac{2t}{\tau} \text{ si } -\dfrac{\tau}{2} \le t \le 0 \\ 1 - \dfrac{2t}{\tau} \text{ si } 0 \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

1°- Donner la fonction complexe $\underline{f}(t)$ associée à $f(t)$.

2°- Calculer la transformée de Fourier $\underline{F}(\nu)$ de $\underline{f}(t)$.

3°- Trouver la relation entre τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de $|\underline{F}(\nu)|^2$. On donne $\operatorname{sinc}^2 1{,}39 = 0{,}5$

Réponses: 2. $\underline{F}(\nu) = \dfrac{\tau}{2\sqrt{2\pi}} \left[\dfrac{\sin \dfrac{\pi(\nu-\nu_0)}{2}\tau}{\dfrac{\pi(\nu-\nu_0)}{2}\tau} \right]^2$ 3. $\Delta\nu_{1/2} \times \tau \cong 1{,}8$

Vibration quasi monochromatique Gaussienne

Une vibration quasi monochromatique a pour expression réelle:

$$f(t)= A_0 e^{-\left(\frac{t^2}{\tau^2}\right)} \cos(2\pi\nu_0 t)$$

où τ est la durée de relaxation en amplitude de la vibration et

où $-\infty<t<+\infty$

1. Donner la fonction complexe $\underline{f}$ (t) associée à *f(t)*.

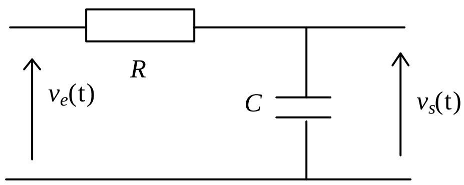
2. Calculer la transformée de Fourier $\underline{F}(\nu)$ de $\underline{f}$ (t).

3. Trouver la relation entre τ et la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2}$ de $\left|\underline{F}(\nu)\right|^2$. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$

Réponses: 2. $\underline{F}(\nu) = \tau\, e^{-2\pi^2(\nu-\nu_0)^2\tau^2}$

3. $\Delta\nu_{1/2} \times \tau = \dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{\pi} \approx 0,375$

Transformée de Fourier et réponse impulsionnelle



On considère un circuit *RC* pour lequel on prélève la sortie aux bornes de *C*. On excite ce circuit à l'aide d'une impulsion de largeur *T* et de hauteur *A* : $v_e(t)=0$ si $t<0$ ou $t>T$, $v_e(t)=A$ si $0<t<T$. *A* et *T* sont choisis de telle sorte que $A\times T=1$. (impulsion unité)

1. Calculer $v_s(t)$. On posera $\boldsymbol{t}=1/(RC)$.

2. On appelle *réponse impulsionnelle* du circuit la limite de $v_s(t)$ lorsque *T* tend vers 0. Donner la réponse impulsionnelle de ce circuit *RC*. Calculer la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle: $F(w)=\dfrac{1}{\sqrt{2p}}\displaystyle\int_{t=-\infty}^{+\infty} v_{s_{imp}}(t)\, e^{-iwt}\, dt$

3. Donner la fonction de transfert $H(iw)$ du circuit. Comparer *H* et *F*.

Réponses:1. $v_s(t)=A(1-\exp(-t/t))$ pour $0<t<T$ $v_s(t)=A'\exp(-t/t)$ pour $t>T$ avec $A'=A(1-\exp(-T/t))$

2. $v_{s\ imp}(t)=(1/t)\exp(-t/t)$ 3. $F(w)=(2p)^{1/2}/(1+iwt)$