Chapitre X : Torseurs

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *définir une application linéaire symétrique ou antisymétrique*
- *définir la matrice d'une application linéaire et de trouver ses valeurs propres.*
- *effectuer les opérations de dérivation des vecteurs.*
- *énoncer les principales propriétés des torseurs*
- *montrer que le champ des vitesses d'un solide en mouvement est un torseur*

I Applications linéaires

1°- Définition

Soit f une application de E^3 dans E^3. f est linéaire si :

$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^3$, $\qquad f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, \mathbf{u} \in E^3$, $\qquad f(\lambda\mathbf{u})= \lambda\, f(\mathbf{u})$

2°- Matrice d'une application linéaire

Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ une base orthonormée directe de E^3 et f une application linéaire de E^3 dans E^3

Soit $\mathbf{u} \in E^3$, on peut écrire : $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e_i}$

D'après la linéarité de f on peut écrire :

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i\, f(\mathbf{e_i})$$

Ainsi, pour connaître l'application linéaire f, il suffit de connaître les images par f de chacun des vecteurs de base.

En notant : $f(\mathbf{e_j}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \mathbf{e_i}$, on peut écrire la relation précédente sous forme matricielle pour obtenir la matrice colonne de $f(\mathbf{u})$ sur la base $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$:

$$\left[f(\mathbf{u})\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[f(\mathbf{u})\right] = \mathbf{A}[\mathbf{u}]$$

La matrice **A** associée à f est la matrice *dont les colonnes sont les coordonnées dans la base* $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ *des images de* $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ *et* $\mathbf{e_3}$.

3°- vecteurs propres et valeurs propres

Un vecteur non nul **u** de E^3 est un *vecteur propre* de f si il existe λ tel que :

$$\boxed{f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}}$$

λ est la *valeur propre* associée à **u**.

Pour trouver les valeurs propres d'une application linéaire, il suffit de résoudre $f(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ avec $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{soit : } \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ceci ne pouvant être réalisé avec $(u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$ qu'en annulant le déterminant de ce système, c'est à dire en annulant le *polynôme caractéristique* de f :

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0}$$

4°- Applications symétriques et antisymétriques

Soit h une application de E^3 dans E^3.

h est *symétrique* si $\quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^3 \quad \mathbf{u}\cdot h(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot h(\mathbf{u})$

h est *antisymétrique* si $\quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E^3 \quad \mathbf{u}\cdot h(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\cdot h(\mathbf{u})$

propriétés : une application symétrique ou antisymétrique est nécessairement linéaire.

5°- Propriétés des applications linéaires symétriques

Soit h_s une application symétrique (et donc linéaire) de E^3 dans E^3. Notons $\mathbf{A_S}$ la matrice de h_s dans une base orthonormée directe ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$).

■ $\mathbf{A_S}=\mathbf{A_S}^t$ où $\mathbf{A_S}^t$ est la matrice transposée de $\mathbf{A_S}$. Autrement dit, la matrice de h_s est symétrique : $\mathbf{A_S} = \begin{bmatrix} a_{11} & q & r \\ q & a_{22} & s \\ r & s & a_{33} \end{bmatrix}$

■ Les valeurs propres de h_s sont réelles.

■ Il existe au moins une base orthonormée constituée de vecteurs propres de h_s. Dans cette base, la matrice de h_s est diagonale :

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}$$

Remarque : quand on effectue la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres d'une application linéaire et que l'on exprime sa matrice dans une *base propre* (c'est-à-dire une base constituée de vecteurs propres), on dit que l'on *diagonalise* l'opérateur.

■ enfin, si h_s est une application linéaire symétrique *définie positive*, c'est-à-dire si :

$$\forall\, \mathbf{u} \in E^3 \qquad , \mathbf{u}\cdot h_s(\mathbf{u})>0$$

alors les valeurs propres de h_s sont strictement positives.

6°- Propriétés des applications linéaires antisymétriques

Soit h_a une application antisymétrique (et donc linéaire) de E^3 dans E^3. Notons $\mathbf{A_A} = \left[a_{ij}\right]$ la matrice de h_a dans une base orthonormée directe ($\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$).

L'antisymétrie de h_a conduit à : $\forall\, i$, $\mathbf{e_i}\cdot h_a(\mathbf{e_i})=-\,\mathbf{e_i}\cdot h_a(\mathbf{e_i})$, soit $a_{ij}=0$

$\forall\, i,j$, $\mathbf{e_j}\cdot h_a(\mathbf{e_i})=-\,\mathbf{e_i}\cdot h_a(\mathbf{e_j})$, soit $a_{ij}=-a_{ji}$

La matrice de h_a s'écrit donc : $\mathbf{A_A} = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$ et on peut vérifier alors la propriété fondamentale :

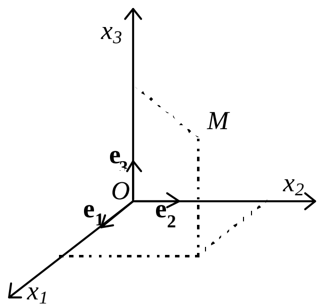
$$\forall \mathbf{u} \in \mathrm{E}^3, [h_a(\mathbf{u})] = \mathbf{A_A}[\mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

On voit qu'il existe un unique vecteur **R** de E^3 appelé *vecteur de l'application linéaire antisymétrique* qui permet d'écrire :

$$\boxed{\forall \mathbf{u} \in \mathrm{E}^3, h_a(\mathbf{u}) = \mathbf{R} \times \mathbf{u}}$$

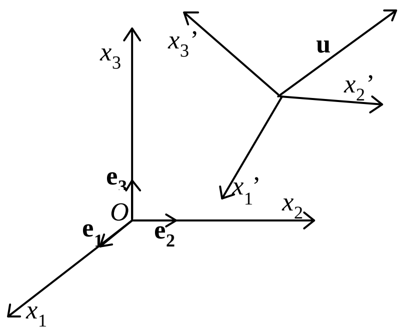
7°- dérivation composée des vecteurs

En physique, pour décrire l'évolution spatio-temporelle des objets étudiés (mobiles, champs, etc.) on utilise un repère spatial matérialisé par des axes de coordonnées et un repère temporel ou chronologie. L'ensemble est appelé *référentiel*.



Ainsi, un événement se produisant en M dans un référentiel R est repéré par trois coordonnées spatiales (x_1, x_2, x_3) et une coordonnée temporelle t, soit un quadruplet (x_1, x_2, x_3, t)

Considérons deux référentiels R et R' en mouvement relatif et soit **u** un vecteur *fixe* de R', c'est à dire dont les coordonnées (x_1', x_2', x_3') ne dépendent pas de t. La dérivée de **u** par rapport à R' est nulle :



$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{R'} = \mathbf{0}$$

Nous cherchons à étudier le mouvement de $\mathbf{u}$ par rapport à *R*, c'est-à-dire en pratique à calculer la dérivée temporelle de $\mathbf{u}$ dans *R*. Celle ci est a priori non nulle puisque *R'* est en mouvement par rapport à *R*.

A l'aide des coordonnées, nous avons :

$$\left[\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_R\right] = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix}$$

mais nous cherchons une méthode plus efficace de calcul.

Considérons l'application f qui à un vecteur $\mathbf{u}$ fixe de *R'* associe sa dérivée par rapport à R : $f : \mathbf{u} \mapsto \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_R$

Soient maintenant $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ deux vecteurs fixes de *R'*. Le produit scalaire $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}$ est une constante. Donc $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})_R = 0 = \mathbf{u} \bullet \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \bullet \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, ce qui avec l'application f s'écrit : $\mathbf{u} \bullet f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \bullet f(\mathbf{u})$

Ceci montre que l'application f est *antisymétrique*. Il existe donc un unique vecteur $\mathbf{W}$ tel que : $f(\mathbf{u})=\mathbf{W}\times\mathbf{u}$.

Soit : $\boxed{\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_R = \mathbf{W} \times \mathbf{u}}$.

Le vecteur $\mathbf{W}$ s'appelle le *vecteur rotation* de *R'* par rapport à *R*

Généralisation : Etudions maintenant le cas d'un vecteur $\mathbf{u}$ mobile par rapport à *R'* et a priori aussi par rapport à *R*.

Nous avons : $\mathbf{u} = x'_1\mathbf{e'_1} + x'_2\mathbf{e'_2} + x'_3\mathbf{e'_3}$

donc :

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(x'_1\mathbf{e'_1} + x'_2\mathbf{e'}_2 + x'_3\mathbf{e'}_3\right)$$

$$= \left(\frac{dx'_1}{dt}\mathbf{e'_1} + \frac{dx'_2}{dt}\mathbf{e'}_2 + \frac{dx'_3}{dt}\mathbf{e'}_3\right) + \left(x'_1\frac{d\mathbf{e'_1}}{dt} + x'_2\frac{d\mathbf{e'}_2}{dt} + x'_3\frac{d\mathbf{e'}_3}{dt}\right)$$

Le première parenthèse est la dérivée de **u** par rapport à *R'*, tandis que la seconde représente la dérivée par rapport à *R* d'un vecteur *fixe* de *R'*, quantité dont nous maîtrisons maintenant le calcul.

On en déduit la formule fondamentale :

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)_{R'} + \mathbf{W}\times\mathbf{u}}$$

II Torseurs

1°- Définition

Soit **V** un champ de vecteurs, c'est-à-dire une application de l'espace affine euclidien E^3 (ou d'une partie de E^3) dans l'espace vectoriel E^3 :

$$\mathbf{V}: E^3 \to \mathrm{E}^3$$
$$M \mapsto \mathbf{V}(M)$$

Le champ de vecteurs **V** est *antisymétrique* si il existe un vecteur **R** tel que :

$$\boxed{\forall\, P, M \in E^3, \quad \mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(P) + \mathbf{R}\times\mathbf{PM}}$$

On dit alors que le champ de vecteur **V** est un *torseur*.

Pour connaître complètement un torseur, il suffit de connaître sa *résultante*, c'est à dire son vecteur **R**, et son *moment en un point*, c'est à dire sa valeur **V**(*P*) en un point *P* particulier.

Le couple $\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V}(P) \end{Bmatrix}$ constitue les *éléments de réduction* en P du torseur.

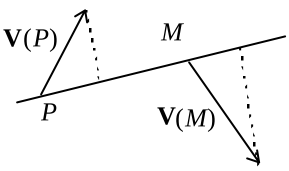
2°- équiprojectivité

Un champ de vecteur est *équiprojectif* si :

$$\boxed{\forall\, P, M \in E^3, \quad \mathbf{V}(M)\cdot\mathbf{PM} = \mathbf{V}(P)\cdot\mathbf{PM}}$$

Théorème : un champ de vecteur équiprojectif est antisymétrique et réciproquement

Géométriquement, l'équiprojectivité traduit l'égalité des projections des deux moments **V**(*M*) et **V**(*P*) sur la droite *PM*.



3°- comoment de deux torseurs

Soient deux torseurs $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$. On définit le *comoment* de ces deux torseurs par le scalaire :

$$\mathrm{P} = \mathbf{V_1} \otimes \mathbf{V_2} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R_1} \\ \mathbf{V_1}(P) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \mathbf{R_2} \\ \mathbf{V_2}(P) \end{Bmatrix} = \mathbf{R_1} \bullet \mathbf{V_2}(P) + \mathbf{R_2} \bullet \mathbf{V}_1(P)$$

Bien noter dans cette définition que le calcul s'effectue prenant les éléments de réduction *au même point P* pour les deux torseurs.

Exercice : montrer que la valeur de P ne dépend pas du point *P* choisi pour exprimer les éléments de réduction des deux torseurs.

4°- axe central d'un torseur

C'est l'ensemble des points *P* de l'espace en lesquels le moment **V**(*P*) est parallèle au vecteur **R**.

On montre que c'est une droite et que sur cette droite, le torseur garde une valeur constante. La norme du torseur est en outre minimum sur cette droite.

5°- couple

Un *couple* est un torseur qui a sa résultante nulle.

Propriété : le moment d'un couple est indépendant du point où on le calcule.

Un couple n'a pas d'axe central.

6°- glisseur

Un *glisseur* est un torseur dont le moment s'annule en un point G.

La droite $(G,\mathbf{R})$ est alors l'axe central du glisseur et le torseur y prend des valeurs nulles.

7°- torseur associé à un ensemble de vecteurs liés

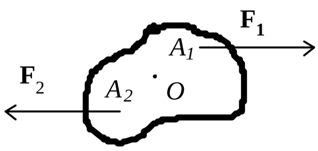
On appelle *vecteur lié* le couple $(A,\mathbf{u}) \in E^3 \times \mathrm{E}^3$

Soit un ensemble de n vecteurs liés $(A_i, \mathbf{u_i})$ $i=1..n$.

On définit le torseur associé à ces n vecteurs liés par ses éléments de réduction en P :

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u_i} \\ \mathbf{V}(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{PA_i} \times \mathbf{u_i} \end{Bmatrix}$$

Exemple : Soit une plaque matérielle soumise à deux forces $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ opposées et appliquées respectivement en A_1 et A_2.



Le « *torseur des actions* » exercées sur la plaque est :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F_2} = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(O) = \mathbf{OA}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OA_2} \times \mathbf{F_2} = \mathbf{A_1A_2} \times \mathbf{F_2} = \mathbf{G} \end{Bmatrix}$$

O est un point quelconque de l'espace. Le torseur est un *couple* et on vérifie que son moment est indépendant de *O*.

8°- torseur associé à un champ de vecteurs

Soit **F** un champ de vecteurs défini sur un domaine *D* de E^3. On définit le torseur associé au champ de **F** par ses éléments de réduction en *P* :

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} = \iiint\limits_{A\in D} \mathbf{F}(A)d\boldsymbol{t}_A \\ \mathbf{V}(P) = \iiint\limits_{A\in D} \mathbf{AP}\times\mathbf{F}(A)d\boldsymbol{t}_A \end{Bmatrix}$$

exemple : torseur des actions de pesanteur

Soit un système matériel défini sur un domaine *D* de E^3. Un élément de volume $d\boldsymbol{t}_A$ centré en *A* est soumis à la force de pesanteur : $\mathbf{dP}(A) = \boldsymbol{r}(A)\,\mathbf{g}\,d\tau_A$

Autrement fit, la densité volumique de force de pesanteur en *A* est $\mathbf{F}(A) = \boldsymbol{r}(A)\,\mathbf{g}$

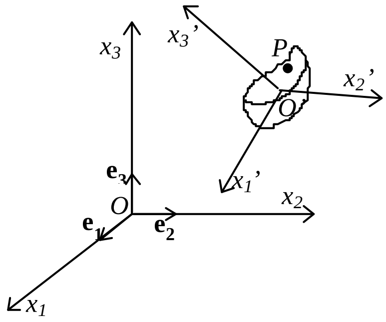
Evaluons les éléments de réduction en *G* du torseur associé aux actions de pesanteur :

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} = \iiint\limits_{A\in D} \mathbf{F}(A)d\boldsymbol{t}_A = \iiint\limits_{A\in D} \boldsymbol{r}(A)\mathbf{g}d\boldsymbol{t}_A = \left(\iiint\limits_{A\in D} \boldsymbol{r}(A)d\boldsymbol{t}_A\right)\mathbf{g} = M\mathbf{g} \\ \mathbf{G}(G) = \iiint\limits_{A\in D} \mathbf{GA}\times\mathbf{F}(A)d\boldsymbol{t}_A = \left(\iiint\limits_{A\in D} \boldsymbol{r}(A)\mathbf{GA}d\boldsymbol{t}_A\right)\times\mathbf{g} = \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

On constate que le torseur associé aux actions de pesanteur est un *glisseur* dont l'axe passe par le barycentre *G* du système matériel.

9°- torseur cinématique d'un solide en mouvement

Considérons le mouvement d'un solide par rapport à un référentiel *R*. On attache à ce solide un référentiel *R'* : le solide est *immobile* dans *R'*.



Soit *P* un point du solide, ou plus généralement un point fixe de *R'*. On cherche le vecteur vitesse de *P* par rapport à *R*.

$$\mathbf{V}(P)_R = \left(\frac{d\mathbf{OP}}{dt}\right)_R$$

Passons par le point *O'* lui aussi fixe dans *R'* :

$$\mathbf{V}(P)_R = \left(\frac{d\mathbf{OP}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\mathbf{OO'}+\mathbf{O'P}}{dt}\right)_R = \mathbf{V}(O')_R + \left(\frac{d\mathbf{O'P}}{dt}\right)_R$$

Or **O'P** est un vecteur fixe de *R'* et donc : $\left(\frac{d\mathbf{O'P}}{dt}\right)_R = \mathbf{W} \times \mathbf{O'P}$

où $\mathbf{W}$ désigne le vecteur rotation du solide (en fait de *R'*) par rapport à *R*.

Le champ des vitesses d'un solide vérifie :

$$\boxed{\mathbf{V}(P)_R = \mathbf{V}(O')_R + \mathbf{W} \times \mathbf{O'P}}$$

C'est un torseur appelé *torseur cinématique* du solide.

Exercices sur les applications linéaires

Vecteur d'un opérateur antisymétrique

Soit h_a une application linéaire antisymétrique. Montrer que son vecteur s'écrit : $\mathbf{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e_i} \times h_a(\mathbf{e_i})$

Application linéaire symétrique définie positive

On considère un solide Σ occupant un domaine D de E^3 et un point O de E^3.

On note I_O l'application définie par :

$$\mathbf{u} \in \mathrm{E}^3 \mapsto I_O(\mathbf{u}) = \int_{P \in D} \mathbf{OP} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{OP})\, dm$$

Montrer que I_O est une application linéaire, symétrique définie positive.

Exercices sur les torseurs

Invariant vectoriel

Soit un torseur donné par ses éléments de réduction en P : $\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V}(P) \end{Bmatrix}$

Montrer que la quantité $\mathbf{I} = \dfrac{\mathbf{R} \bullet \mathbf{V}(P)}{|\mathbf{R}|^2}\mathbf{R}$ ne dépend pas de P.

Espace vectoriel des torseurs

Montrer que l'ensemble des torseurs forme un espace vectoriel

Condition d'antisymétrie

On considère dans E^3 le champ de vecteurs défini par :

$$\mathbf{V}_t(P) = \begin{cases} V_x = 1 + 3y - tz \\ V_y = -3x + 2tz \\ V_z = 2 + tx - t^2 y \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de t ce champ est-il un torseur ?

2. Lorsque c'est un torseur, calculer son vecteur.

Réponse : 1. t=0 ou -2 2.Si t=0, $\mathbf{R}=-3\mathbf{e}_z$ *Si t=-2,* $\mathbf{R}=-4\mathbf{e}_x-2\mathbf{e}_y-3\mathbf{e}_z$