Chapitre IX : Opérations sur les champs

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *donner la signification des opérateurs divergence, rotationnel et laplacien.*
- *Calculer l'action de ces opérateurs sur un champ de vecteurs*
- *manipuler les intégrales multiples et curvilignes*
- *définir et calculer le vecteur surface d'un contour fermé*

I Divergence

1°- Définition intrinsèque

Soit **V** un champ de vecteurs quelconque et soit Δt un élément de volume centré en un point M et délimité par une surface *fermée* ΔS. Notons Df le flux de **V** à travers Dt.

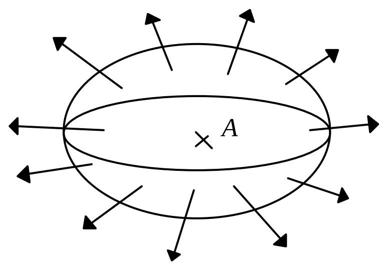
On appellera "divergence de **V**" le *scalaire*:

$$\boxed{div\mathbf{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\displaystyle\oiint_{\Delta S} \mathbf{V} \bullet \mathbf{dS}}{\Delta t}}$$

☞ div **V** est donc le flux de **V** par unité de volume au voisinage de M.

2°- Signification physique

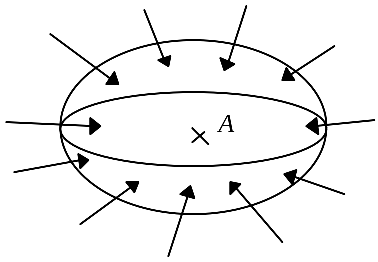
Supposons que le champ de vecteurs **V** soit *émis* à partir d'un point A de l'espace. Pour un volume Δt limité par DS entourant le point A, on aura nécessairement $Df > 0$ (flux sortant) donc $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \geq 0$



Ainsi, div **V** est positive ou nulle en tout point source de champ **V** (la nullité ayant lieu lorsque Df est infiniment petit devant Dt).

De plus, div **V** rend compte de la tendance qu'a le champ **V** à s'éloigner d'un point A, d'où le nom de *divergence* donné à l'opérateur ainsi défini.

A l'inverse, si le champ **V** *converge* vers un point *A* de l'espace, alors on aura $\Delta f < 0$ (flux entrant) et donc $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta t} \leq 0$. Ainsi, div **V** est négative ou nulle en un point de convergence du champ **V**.



On déduit de la définition intrinsèque de la divergence que si le champ de vecteurs **V** est à *flux conservatif*, le flux de **V** à travers la surface ΔS est nul et donc div **V** = 0: le champ **V** ne peut pas diverger d'un point *A* ou converger vers un point *A*. Ainsi, la divergence d'un champ uniforme est nulle.

3°- Formule d'Ostrogradsky (ou de la divergence)

Soit une surface *fermée* *S* délimitant un volume ***t***. La définition de div **V** permet d'écrire:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{V} \bullet \mathbf{dS} = \iiint_t div\, \mathbf{V} d t}$$

Cette formule importante permet de transformer une intégrale de surface (le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée) en une intégrale volumique.

4°- Expression analytique

On calculera la divergence d'un champ de vecteurs **V** en un point *M* de l'espace en utilisant le système de coordonnées dans lequel **V** est défini:

■ *En cartésiennes :*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\,\mathbf{e_x} + V_y(x,y,z)\,\mathbf{e_y} + V_z(x,y,z)\,\mathbf{e_z}$$

$$\boxed{div\, \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

■ *En cylindriques :*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(r,\theta,z) = V_r(r,\theta,z)\,\mathbf{e_r} + V_\theta(r,\theta,z)\,\mathbf{e_\theta} + V_z(r,\theta,z)\,\mathbf{e_z}$$

$$\boxed{div\,\mathbf{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

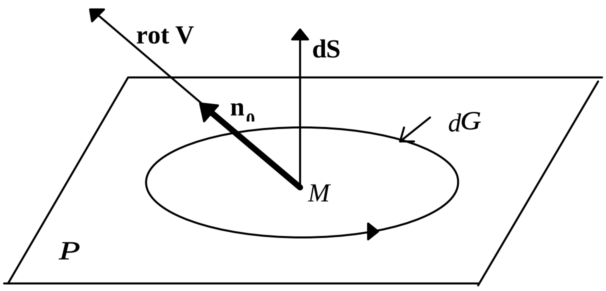
■ *En sphériques :*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(r,\theta,\varphi) = V_r(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_r} + V_\theta(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_\theta} + V_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_\varphi}$$

$$\boxed{div\,\mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}}$$

II Rotationnel d'un champ de vecteurs

1°- Définition intrinsèque



Soit $\mathbf{V}$ un champ de vecteurs quelconque et $d\Gamma$ un contour élémentaire orienté entourant un point M et délimitant une surface dS de vecteur élément de surface $\mathbf{dS} = dS\,\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ étant l'unitaire normal à dS de direction donnée par la règle du tire bouchon de Maxwell. Soit dC la circulation de $\mathbf{V}$ sur le contour $d\Gamma$. On montre que l'on peut mettre dC sous la forme: $dC = \mathbf{rot\,V} \bullet \mathbf{dS}$

La valeur de dC varie lorsque l'orientation du plan P contenant $d\Gamma$ varie. Ainsi le vecteur **rot V** est parallèle au vecteur $\mathbf{n}_0$ normal au plan P pour lequel dC est maximum. On peut écrire :

$$\boxed{\mathbf{rot\ V} = \left(\lim_{dS \to 0} \frac{dC}{dS} \right) \mathbf{n_0}}$$

☞ le plan orthogonal à **rot V** est donc celui dans lequel **V** tourne le plus. On notera l'analogie avec le gradient d'une fonction f qui est un vecteur dirigé dans la direction où la variation de f est maximum.

2°- Formule de Stokes (ou du rotationnel)

Soit un contour C *fermé* orienté et une surface S s'appuyant sur C. La définition intrinsèque de **rot V** permet d'écrire :

$$\boxed{\oint_C \mathbf{V} \bullet \mathbf{dM} = \iint_S \mathbf{rot\,V} \bullet \mathbf{dS}}$$

La circulation de **V** à le long de C est égale au flux de **rot V** à travers S.

Cette formule importante permet de transformer une intégrale curviligne en une intégrale de surface.

3°- Propriétés fondamentales

■ Un champ de gradient étant à circulation conservative :

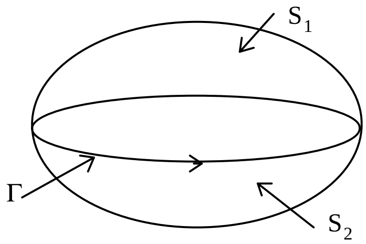
$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,f) = \mathbf{0}}$$

En effet, la circulation de **grad** f sur le contour fermé dG sera nulle.

■ La divergence de **rot V** est toujours nulle :

$$\boxed{div(\mathbf{rot\,V}) = 0}$$

Pour montrer cette propriété, considérons une surface fermée S délimitant un petit volume t entourant le point M. Calculons le flux de **rot V** à travers S pour en déduire div(**rot V**). Décomposons pour cela S en deux parties S_1 et S_2 séparées par un contour G. On a :



$$f(\mathbf{rot\ V} \to S) = f_1(\mathbf{rot\ V} \to S_1) + f_2(\mathbf{rot\ V} \to S_2)$$

Or, $f_1(\mathbf{rot\ V} \to S_1) = \oint_\Gamma \mathbf{V} \bullet \mathbf{dM}$ d'après la formule de Stokes, et en prenant garde à ce que l'orientation choisie pour G soit compatible avec celle de S_1 (tire bouchon de Maxwell). En gardant cette même orientation pour G, S_2 étant d'orientation contraire à celle de S_1, on obtient pour la contribution du flux à travers S_2:

$$f_2(\mathbf{rot\ V} \to S_2) = -\oint_\Gamma \mathbf{V} \bullet \mathbf{dM} = -f_1$$

Au total: $f(\mathbf{rot\ V} \to S) = f_1 + f_2 = 0$ ce qui démontre la propriété.

4°- Champ de rotationnel. Potentiel vecteur

On dit qu'un champ de vecteurs **V** est un champ de rotationnel s'il existe un champ de vecteurs **A** tel que :

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})}$$

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que div **V** = 0 et nous admettrons que cette condition est suffisante.

Le champ de vecteurs **A** est alors dit *potentiel vecteur dont dérive le champ* **V**.

Propriétés:

■ Le champ de vecteurs **A** n'est pas défini de façon unique. En effet, supposons que **V** = **rot A** et posons **A'**= **A** + **grad** *f* où **grad** *f* est un champ de gradient quelconque.

Puisque **rot A'** = **rot** (**A** + **grad** *f*) = **rot A** + **rot** (**grad** *f*) = **rot A** = **V**, **V** dérive aussi du potentiel vecteur **A'**. On dira qu'un potentiel vecteur *n'est défini qu'à un gradient près.*

■ Un champ de rotationnel est à flux conservatif. En effet, soit *S* une surface fermée quelconque délimitant un volume τ :

$$\oint\!\!\oint_S \mathbf{V} \bullet \mathbf{dS} = \oint\!\!\oint_S \mathbf{rot\, A} \bullet \mathbf{dS} = \iiint_\tau div\,(\mathbf{rot\, A})\,d\tau = 0$$

5°- Expression analytique

On calculera la divergence d'un champ de vecteurs **V** en un point *M* de l'espace en utilisant le système de coordonnées dans lequel **V** est défini:

■ *En cartésiennes:*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\,\mathbf{e_x} + V_y(x,y,z)\,\mathbf{e_y} + V_z(x,y,z)\,\mathbf{e_z}$$

$$\boxed{\mathbf{rot\, V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{e_x} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z}$$

■ *En cylindriques:*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(\rho,\theta,z) = V_\rho(\rho,\theta,z)\,\mathbf{e}_\rho + V_\theta(\rho,\theta,z)\,\mathbf{e}_\theta + V_z(\rho,\theta,z)\,\mathbf{e_z}$$

$$\boxed{\mathbf{rot\, V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z}$$

■ *En sphériques :*

$$\mathbf{V}(M) = \mathbf{V}(r,\theta,\varphi) = V_r(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_r} + V_\theta(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_\theta} + V_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e_\varphi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{rot\ V} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \ldots\\ \ldots + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z\end{aligned}}$$

6°- Le vecteur nabla ∇

On introduit un *opérateur vectoriel* appelé "nabla" défini par:

$$\boxed{\nabla = \mathbf{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}}$$

On constate alors que **rot V** peut s'écrire :

$$\mathbf{rot\ V} = \left|\begin{matrix}\left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right)\\ \left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right)\\ \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)\end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{matrix}\right. \times \left|\begin{matrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{matrix}\right.$$

Soit $$\boxed{\mathbf{rot\,V} = \nabla\times\mathbf{V}}$$

Il est par ailleurs aisé de vérifier que

$$\boxed{div\,\mathbf{V} = \nabla\bullet\mathbf{V}}$$

et que $\boxed{\mathbf{grad}\ f = \nabla f}$

Le vecteur symbolique **∇** présente surtout un *intérêt mnémotechnique*.

Ainsi, des formules telles que **rot**(**grad** *f*) = **0** ou div(**rot V**) = 0 s'écriront naturellement: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} f) = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}) = 0$

Nous verrons toutefois plus loin qu'il ne faut pas abusivement se servir de $\boldsymbol{\nabla}$.

III Laplacien

1°- Laplacien scalaire

f étant une fonction scalaire des trois variables scalaires *x*, *y* et *z*, on appelle *laplacien de f* noté Δf la *divergence du gradient* de *f* :

$$\boxed{\Delta f = div(\mathbf{grad} f)}$$

Ainsi : $$\Delta f = div\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)$$

soit $$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

En coordonnées cylindriques on a :

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

et en coordonnées sphériques:

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}}$$

Remarque: Puisque le carré scalaire du vecteur nabla $\boldsymbol{\nabla}$ est $\nabla^{\mathbf{2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, on a $\boxed{\Delta f = \nabla^2 f}$

On peut d'ailleurs écrire que div (**grad** *f*) = $\boldsymbol{\nabla} \bullet (\boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{\nabla}^2 f$

2°- Laplacien vectoriel

V étant un champ vectoriel de composantes V_x , V_y et V_z , on définit le *Laplacien vectoriel* de **V** noté **D V** par le *vecteur* :

$$\boxed{\Delta\mathbf{V} = \Delta V_x \mathbf{e_x} + \Delta V_y \mathbf{e}_y + \Delta V_z \mathbf{e}_z}$$

Avec le vecteur symbolique nabla, on écrira: **D V** =**Ñ^2 V**

■ *Propriété fondamentale:*

Par identification, on peut vérifier que :

$$\boxed{\mathbf{rot}(\mathbf{rot\ V}) = \mathbf{grad}(div\mathbf{V}) - \Delta\mathbf{V}}$$

Remarquons que le vecteur nabla donne un élégant moyen mnémotechnique pour retrouver cette relation puisqu'il s'agit d'appliquer la formule du double produit vectoriel:

rot (**rot V**) = **Ñ**×(**Ñ**×**V**) = **Ñ** (**Ñ•V**) - **Ñ**^{2} **V** = **grad**(div**V**) - **D V**

IV Formules utiles

1°- Identités d'analyse vectorielle

Résumons les propriétés vues ci-dessus:

div (**grad** *f*) = Δ*f*	ou encore	**Ñ** • (**Ñ** *f*) = **Ñ**^{2} f
div (**rot V**) = 0	ou encore	**Ñ** • (**Ñ** × **V**) = 0
rot (**grad** *f*) = **0**	ou encore	**Ñ** × (**Ñ** *f*) = **0**
rot (**rot V**)= **grad**(div **V**) - **D V**	ou encore	**Ñ** × (**Ñ** × **V**) = **Ñ** (**Ñ** • **V**) - **Ñ**^{2} **V**

2°- Formules sur les opérateurs

Par identification, on peut montrer les identités :

$\mathbf{grad}\ (f\,g) = f\,\mathbf{grad}\,g + g\,\mathbf{grad}\,f$	$\mathrm{Div}\ (f\,\mathbf{V}) = f\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} + (\mathbf{grad}\,f) \bullet \mathbf{V}$
$\mathrm{div}\,(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{V} \bullet \mathbf{rot}\,\mathbf{U} - \mathbf{U} \bullet \mathbf{rot}\,\mathbf{V}$	$\mathbf{Rot}\ (f\,\mathbf{V}) = f\ \mathbf{rot}\,\mathbf{V} + (\mathbf{grad}\,f) \times \mathbf{V}$

Là encore, le vecteur nabla permet de se souvenir des formules dès que l'on admet que le nabla s'applique indépendamment à chaque champ. En notant $\boldsymbol{\nabla}_C$ un opérateur n'agissant que sur le champ vectoriel ou scalaire *C*, on écrit par exemple :

$\mathbf{rot}\ (f\,\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla} \times (f\,\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}_f \times (f\,\mathbf{V}) + \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{V} \times (f\,\mathbf{V})$ les dérivations de $\boldsymbol{\nabla}_f$ n'agissent que sur le champ de scalaires *f* et les dérivations de $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{V}$ que sur le champ **V**.

On termine le "calcul" en écrivant :

$$\mathbf{rot}\ (f\,\mathbf{V}) = \boldsymbol{\nabla}_f \times (f\,\mathbf{V}) + \boldsymbol{\nabla}_\mathbf{V} \times (f\,\mathbf{V}) = (\boldsymbol{\nabla}_f\, f) \times \mathbf{V} + f\,\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{V} \times \mathbf{V}$$

$$= (\mathbf{grad}\,f) \times \mathbf{V} + f\,\mathbf{rot}\,\mathbf{V}$$

Voici encore deux formules utiles que l'on pourra retrouver avec le vecteur $\boldsymbol{\nabla}$:

$\mathbf{rot}\,(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{V})\,\mathbf{U} - (\mathrm{div}\,\mathbf{U})\,\mathbf{V} + (\mathbf{V}\bullet\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{U} - (\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V}$
$\mathbf{grad}\,(\mathbf{U}\bullet\mathbf{V}) = \mathbf{U} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{V} + \mathbf{V} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{U} + (\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{V} + (\mathbf{V}\bullet\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{U}$

(la dernière formule est difficile à "retrouver" et il est bon de la retenir par cœur !)

Remarque: dans ces deux formules, il apparaît des termes du type $(\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla})\ \mathbf{V}$. Il s'agit de *l'opérateur* $(\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla})$ qui agit sur chacune des composantes du vecteur **V**; le résultat est donc un *vecteur*. Par exemple, en cartésiennes :l'opérateur $(\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla})$ est :

$$(\mathbf{U}\bullet\boldsymbol{\nabla}) = U_x \frac{\partial}{\partial x} + U_y \frac{\partial}{\partial y} + U_z \frac{\partial}{\partial z}$$

son action sur **V** est :

$$(\mathbf{U}\bullet\nabla)\mathbf{V}=\left(U_x\frac{\partial}{\partial x}+U_y\frac{\partial}{\partial y}+U_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{vmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}U_x\dfrac{\partial V_x}{\partial x}+U_y\dfrac{\partial V_x}{\partial y}+U_z\dfrac{\partial V_x}{\partial z}\\U_x\dfrac{\partial V_y}{\partial x}+U_y\dfrac{\partial V_y}{\partial y}+U_z\dfrac{\partial V_y}{\partial z}\\U_x\dfrac{\partial V_z}{\partial x}+U_y\dfrac{\partial V_z}{\partial y}+U_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z}\end{vmatrix}$$

Exemple: vérifier que $(\mathbf{OM}\bullet\nabla)\mathbf{OM} = \mathbf{OM}$ et que plus généralement $(\mathbf{A}\bullet\nabla)\mathbf{OM} = \mathbf{A}$

3°- Formules intégrales

a- Formule du gradient

Soit à calculer sur une surface *fermée S* limitant un volume t l'intégrale vectorielle:

$$\mathbf{I}=\oiint_S f\ \mathbf{dS}\ :$$

Pour cela, considérons un champ de vecteurs uniforme quelconque **A**.

On a: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \oiint_S f\ \mathbf{A}\bullet\mathbf{dS}$ expression où l'on reconnaît le flux du champ $f\ \mathbf{A}$ à travers S, donc en utilisant la formule d'Ostrogradsky: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \oiint_S f\ \mathbf{A}\bullet\mathbf{dS} = \iiint_t div(f\ \mathbf{A})dt$

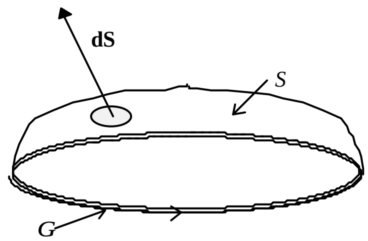
Or div $(f\mathbf{A}) = f$ div $\mathbf{A}$ + $\mathbf{grad}\, f\bullet\mathbf{A}$ et puisque **A** est uniforme, div **A** = 0.

D'où $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \iiint_t \mathbf{grad}\, f\bullet\mathbf{A}dt = \mathbf{A}\bullet\iiint_t \mathbf{grad}\, f\ dt$

Soit $$\boxed{\oiint_S f\,\mathbf{dS} = \iiint_t \mathbf{grad}\, f\; dt}$$

■ *Conséquence: Vecteur surface*

Soit une surface S s'appuyant sur un contour orienté G.

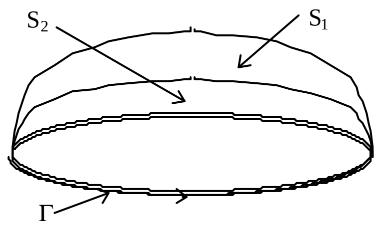


Par définition, le *vecteur surface* de S est

$$\boxed{\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{dS}}$$

Montrons que **S** ne dépend que de G (On parlera du *vecteur surface d'un contour*)

Soient S_1 et S_2 deux surfaces s'appuyant sur G.



On a $\mathbf{S_1} = \iint_{S_1} \mathbf{dS}$ et $\mathbf{S_2} = \iint_{S_2} \mathbf{dS}$

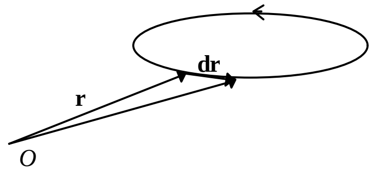
Pour la surface *fermée* ($S_1 + S_2$), on a: $\oiint_{S_1+S_2} \mathbf{dS} = \iint_{S_1} \mathbf{dS} - \iint_{S_1} \mathbf{dS} = \mathbf{S_1} - \mathbf{S_2}$ (on a un signe moins car le vecteur **dS** sur la surface fermée $S_1 + S_2$ doit être dirigé vers l'extérieur).

Appliquons la formule du gradient :

$$\mathbf{S_1} - \mathbf{S_2} = \oiint_{S_1+S_2} 1\,\mathbf{dS} = \iiint_t \mathbf{grad} 1\, dt = \mathbf{0}$$

Donc $\mathbf{S_1} = \mathbf{S_2} = \mathbf{S}$, ce qu'il fallait démontrer. On remarquera intuitivement qu'en général la norme de **S** *n'est pas égale* à la surface de S s'appuyant sur G.

De plus, si on choisit pour S le cône de sommet O engendré par $\mathbf{r}$ se déplaçant sur G, on obtient puisque $\mathbf{dS} = \frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{dr}$



$$\boxed{\mathbf{S} = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\mathbf{r}\times\mathbf{dr}}$$

b- Formule du rotationnel

Soit à calculer sur une surface *fermée* S limitant un volume $\boldsymbol{t}$ l'intégrale vectorielle:

$$\mathbf{I} = \oiint_{S}\mathbf{V}\times\mathbf{dS}$$

Pour cela, considérons un champ de vecteurs uniforme quelconque **A**.

On a: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \oiint_{S}\mathbf{A}\bullet(\mathbf{V}\times\mathbf{dS}) = -\oiint_{S}(\mathbf{V}\times\mathbf{A})\bullet\mathbf{dS} = \iiint_{t} div(\mathbf{V}\times\mathbf{A})\ d\boldsymbol{t}$

Or div(**V**×**A**) = **A** • **rot V** - **V** • **rot A** et puisque **A** est uniforme, **rot A** = **0**.

D'où $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = -\iiint_{t}\mathbf{A}\bullet\mathbf{rot\,V}\ d\boldsymbol{t} = -\mathbf{A}\bullet\iiint_{t}\mathbf{rot\,V}\ d\boldsymbol{t}$

Soit $$\boxed{\oiint_{S}\mathbf{V}\times\mathbf{dS} = -\iiint_{t}\mathbf{rotV}\ d\boldsymbol{t}}$$

c- Formule de Kelvin

Soit à calculer sur un contour fermé G limitant une surface S l'intégrale vectorielle :

$$\mathbf{K} = \oint_{\Gamma} f\ \mathbf{dM}$$

Pour cela, considérons un champ de vecteurs uniforme quelconque **A**.

Alors : $\mathbf{A} \bullet \mathbf{K} = \oint_{\Gamma} f\mathbf{A} \bullet \mathbf{dM} = \iint_{S} \mathbf{rot}(f\ \mathbf{A}) \bullet \mathbf{dS}$

Or $\mathbf{rot}\ (f\,\mathbf{A}) = f\ \mathbf{rot\ A} + \mathbf{grad}\, f \times \mathbf{A}$ et puisque **A** est uniforme :

$$\mathbf{rot\ A} = \mathbf{0}.$$

D'où $\mathbf{A} \bullet \mathbf{K} = \iint_{S} (\mathbf{grad}\, f \times \mathbf{A}) \bullet \mathbf{dS} = -\iint_{S} (\mathbf{grad}\, f \times \mathbf{dS}) \bullet \mathbf{A}$

Soit $$\boxed{\oint_{\Gamma} f\ \mathbf{dM} = -\iint_{S} \mathbf{grad}\, f \times \mathbf{dS}}$$

Exercices : Opérations sur les champs

Expression analytique de la divergence

Retrouver l'expression analytique de la divergence en coordonnées cartésiennes en utilisant sa définition intrinsèque.

Pour cela, calculer le flux du champ de vecteurs $\mathbf{V}(x,y,z)=V_x\mathbf{e_x}+V_y\mathbf{e_y}+V_z\mathbf{e_z}$ à travers un cube de côtés $2dx=2dy=2dz$ centré en $M(x,y,z)$.

On rappelle qu'une composante $V_i(x,y,z)$ (avec $i=x,y$ ou z) se développe selon :

$$V_i(x+h,y+k,z+l) \simeq V_i(x,y,z)+\frac{\partial V_i}{\partial x}\,h+\frac{\partial V_i}{\partial y}\,k+\frac{\partial V_i}{\partial z}\,l$$

lorsque $(h,k,l)\rightarrow(0,0,0)$

Expression analytique du rotationnel

Retrouver l'expression analytique de la composante selon x de **rot V** en utilisant sa définition intrinsèque.

Pour cela, calculer la circulation de $\mathbf{V}(x,y,z)$ autour d'un carré situé dans le plan $z=cte$ de côtés $2dx=2dy$ centré en $M(x,y,z)$

Formules d'analyse vectorielle

1. Exprimer **grad** $(f+g)$; div $(\mathbf{u}+\mathbf{v})$; $\mathbf{rot}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

2. Vérifier à l'aide du vecteur $\boldsymbol{\nabla}$ les deux formules d'analyse vectorielle :

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (\mathrm{div}\,\mathbf{v})\,\mathbf{u} - (\mathrm{div}\,\mathbf{u})\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}$$

Expressions analytique du Laplacien

Retrouver les expressions du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques et sphériques en utilisant les expressions de **grad** f et de div **v** dans ces systèmes de coordonnées, et de la relation $\Delta f = \mathrm{div}\,(\mathbf{grad}\, f)$

Opérations sur le champ r*(x,y,z)*

Calculer directement en coordonnées cartésiennes les quantités :

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{r}^2 \ ; \ \mathrm{div}\,\mathbf{r} \ \text{ et } \ \mathbf{rot}\,\mathbf{r} \quad \text{avec } \mathbf{r}=x\,\mathbf{e_x}+y\,\mathbf{e_y}+z\,\mathbf{e_z}$$

Interpréter les résultats à l'aide des définitions intrinsèques des opérateurs

Réponses: ***grad r***^{2} *= 2****r*** *;* *div* ***r*** *=3* *;* ***rot r = 0***

Champ des vitesses d'un solide

Soit un solide en rotation autour de l'axe *Oz* à la vitesse angulaire w

1. Exprimer le vecteur vitesse d'un point *M* du solide en fonction de **r**=**OM** et de $\mathbf{w}=w\,\mathbf{e_z}$.

2. Calculer **rot v** et div **v**. En déduire que **v** dérive d'un potentiel vecteur.

3. Trouver un des potentiels vecteurs dont dérive **v** en se servant de **rot** (f **v**).

Réponses: 1. ***v****=****w´r*** *2.* ***rot v*** *= 2****w*** *div* ***v*** *= 0 3.* ***A*** *= (****w·r****)****r*** *par exemple*

Divergence du champ $\mathbf{e}_r$

1. Calculer la divergence du champ $\mathbf{e_r}=\mathbf{r}/r$

2. En déduire le flux de $\mathbf{e_r}$ à travers la sphère de centre O de rayon R en utilisant la formule d'Ostrogradsky. Vérifier le résultat par un calcul direct

`Réponses: 1- div` $\mathbf{e}_r = 2/r$ `2-` $\Phi(\mathbf{e}_r \rightarrow S) = 4\pi R^2$

Laplacien d'un champ à symétrie sphérique

On considère un champ de scalaires à symétrie sphérique :

$$f(r,\theta,\varphi)=f(r).$$

Montrer que $\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rf(r)\right)$

Volume délimité par une surface fermée

1. Calculer la divergence du champ $\mathbf{r}=\mathbf{OM}$

2. Soit une surface fermée S entourant l'origine et délimitant un volume V.

Montrer que $$V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r}\cdot\mathbf{dS}$$

Interpréter géométriquement le résultat.

Formule de Green

f et g étant deux champs de scalaires et S une surface fermée délimitant un volume V, établir la formule :

$$\iint_S \left(f\,\mathbf{grad}\,g - g\,\mathbf{grad}\,f\right)\cdot\mathbf{dS} = \iiint_V \left(f\Delta g - g\Delta f\right)d\tau$$

Idendités remarquables

A est un champ de vecteur uniforme . Calculer

1. div ($\mathbf{A}\times\mathbf{grad}\,U$)
2. **grad**(**A·r**)
3. Δ(**A·r**)

Réponses: 1. 0   2. ***A***   *3. 0*

Formule de Stokes et calcul d'une circulation

Soit le champ de vecteurs: $\mathbf{A}(x,y)=\dfrac{x\mathbf{e_y}-y\mathbf{e_x}}{x^2+y^2}$ défini dans le plan xOy.

1. Calculer **rot A**
2. Calculer la circulation de **A** le long d'une courbe fermée du plan xOy entourant l'origine. On fera un calcul direct en utilisant les coordonnées polaires.
3. Pourquoi la formule de Stokes ne s'applique-t-elle pas dans ce cas ?

Réponses: 1. ***rot A = 0***   *2. 2p   3. Classe de* ***A***

Champ d'un dipôle

Le potentiel créé en un point de position **r** par un dipôle électrostatique **p** situé à l'origine est donné par :

$$V=\frac{1}{4pe_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e_r}}{r^2}=\frac{1}{4pe_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

En déduire l'expression vectorielle de **E** en **r** :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathbf{p}\right]$$

Une propriété locale du champ en $1/r^2$

Un champ vectoriel **A** possède la symétrie sphérique autour d'un point O.

1. - Montrer que le rotationnel de ce champ est nul.

2. - On suppose qu'en plus, on a div $\mathbf{A} = 0$ en tout point sauf en O. Montrer que ce champ est nécessairement un champ en $1/r^2$ (champ Newtonien)

Indication: On montrera que le champ **A** *dérive d'un potentiel V qui satisfait à l'équation de Laplace $\Delta V=0$ et on exprimera ΔV en coordonnées sphériques.*