Chapitre VIII: Les Coniques

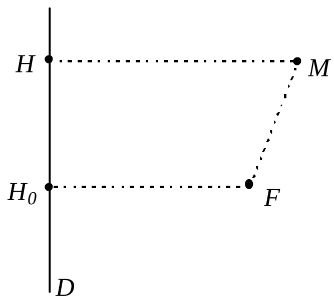
Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *donner l'équation polaire avec origine au foyer d'une conique*
- *identifier une conique connaissant son excentricité.*
- *trouver les caractéristiques manquantes d'une conique à partir de caractéristiques connues.*

I Généralités

1°- Définition géométrique

- Une conique est l'ensemble des points d'un plan tels que le rapport des distances à un point F, appelé *foyer* et à une droite D appelée *directrice* soit constant.

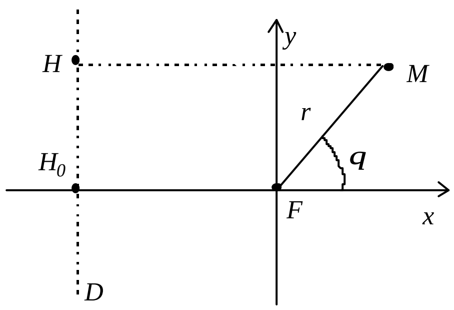


- Le rapport $e = \dfrac{FM}{HM}$ est l'*excentricité* de la conique.

- La distance de F à D peut s'écrire $FH_0 = \dfrac{p}{e}$, p étant le *paramètre* de la conique.

Propriété : p représente la distance FM lorsque FM est parallèle à D.

2°- Equation polaire

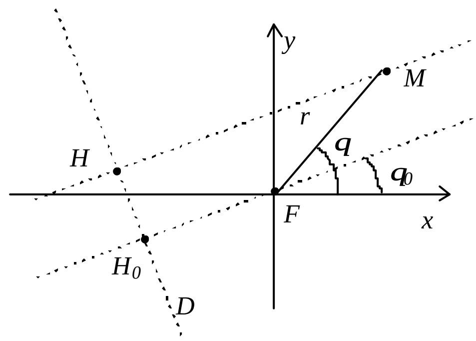


On place le foyer à l'origine d'un système de coordonnées polaires ($F\mathbf{x}$ orthogonal à D):

$$\begin{cases} FM = r \\ q = (F\mathbf{x}, \mathbf{FM}) \end{cases}$$

De $FM = e \cdot HM$ et $HM = H_0F + r\cos\theta = \dfrac{p}{e} + r\cos\theta$, on tire : $r = e \cdot \left(\dfrac{p}{e} + r\cos\theta\right)$ que l'on écrit : $\boxed{r = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}}$ équation polaire de la conique avec origine au foyer.

Remarquons que l'on retrouve la propriété: $p = r_{\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)}$



Dans le cas où l'axe focal H_0F fait un angle θ_0 avec F**x**, on obtient l'équation : $\boxed{r = \dfrac{p}{1 - e \cdot \cos(\theta - \theta_0)}}$

On appelle θ_0 l'*azimuth focal*

3°- Classification

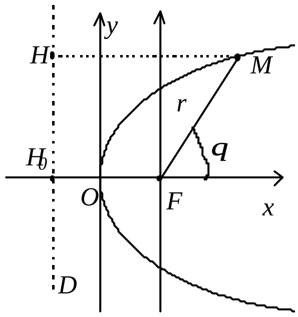
- Si $e = 1, r \in \left[r_{\min}, +\infty\right[$ avec $r_{\min} = \dfrac{p}{2}$: la conique est une *parabole*.

- Si $e < 1, r \in \left[r_{\min}, r_{\max}\right]$ avec $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$ et $r_{\max} = \dfrac{p}{1-e}$: la conique est une *ellipse*.

- Si $e > 1, r \in \left[r_{\min}, +\infty\right[$ avec $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$: la conique est une *hyperbole*.

II Parabole

1°- Propriétés géométriques



Puisque e=1, $FM = HM$: la parabole est l'ensemble des points situés à égale distance du foyer et de la directrice.

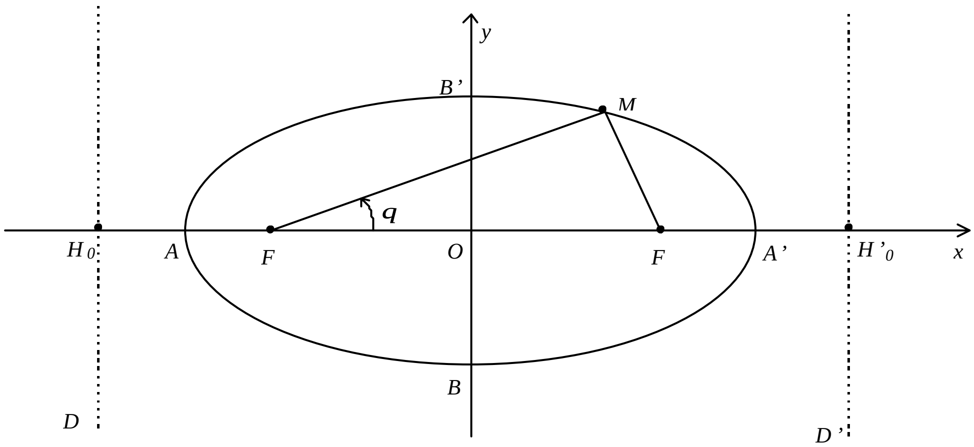
Relation intéressante: $H_0O = OF = r_{\min} = \dfrac{p}{2}$

2°- Equation cartésienne

En prenant l'origine du système de coordonnées cartésiennes au sommet O de la parabole (et non plus au foyer), on obtient *l'équation canonique* de la parabole: $\boxed{y^2 = 2px}$

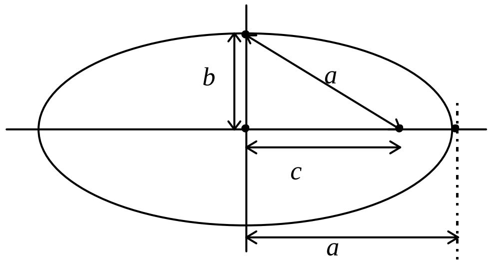
III Ellipse

1°- Propriétés géométriques



- L'ellipse est l'ensemble des points tels que la somme des distances à deux points appelés foyers est constante:

$$\boxed{FM + F'M = AA' = cte}$$



- L'axe focal AA' est le *grand axe* de l'ellipse; BB' est le *petit axe* de l'ellipse.

- *Relations intéressantes:*

On pose $AA' = 2a$ $BB' = 2b$ $FF' = 2c$. On a alors :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad e = \frac{c}{a}}$$

Ainsi, connaissant deux des trois distances a, b, c on peut en déduire p et e.

Réciproquement, connaissant p et e, on peut retrouver a, b et c ; en effet:
$r_{\min} = FA = a - c = \dfrac{p}{1+e}$ et $r_{\max} = FA' = a + c = \dfrac{p}{1-e}$ donc

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

d'où : $$\boxed{a = \frac{p}{1-e^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \qquad c = \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}}}$$

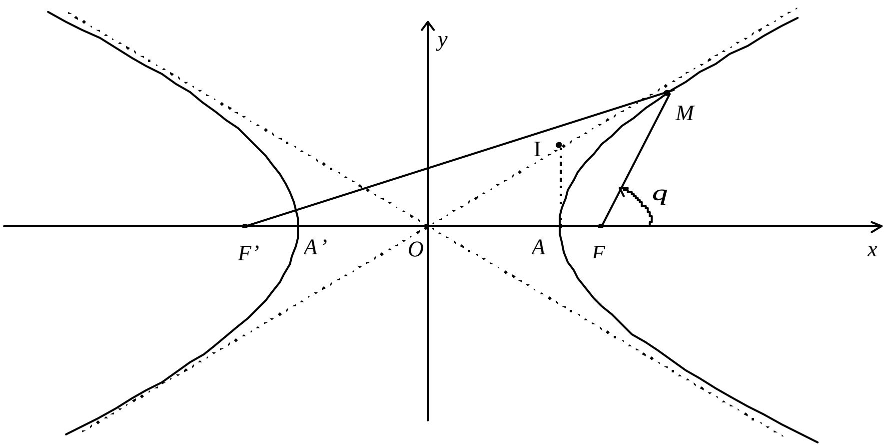
2°- Equation cartésienne

Dans le système de coordonnées cartésiennes avec l'origine O au centre de l'ellipse, l'équation canonique de l'ellipse s'écrit :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

IV Hyperbole

1°- Propriétés géométriques



L'hyperbole est l'ensemble des points tels que la différence des distances à deux points appelés foyers est constante :

$$\boxed{\left|F'M - FM\right| = A'A = cte}$$

L'axe A'A s'appelle *l'axe focal*.

Relations intéressantes:

On pose $A'A = 2a \quad AI = b \quad F'F = 2c$ On a alors :

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2 \qquad p = \frac{b^2}{a} \qquad e = \frac{c}{a}}$$

Ainsi, connaissant deux des trois distances a, b, c on peut en déduire p et e.

Réciproquement, connaissant p et e, on peut retrouver a, b et c :

En effet : pour q=0 , $|r| = FA' = c + a = \dfrac{p}{e-1}$

pour q=π, $r = FA = c - a = \dfrac{p}{e+1}$

donc $2c = \frac{p}{e+1} + \frac{p}{e-1} = \frac{2p}{e^2-1}$ d'où :

$$\boxed{a = \frac{p}{e^2-1} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \qquad c = \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}}}$$

2°- Equation cartésienne

Dans le système de coordonnées cartésiennes avec l'origine O au centre de symétrie de l'hyperbole, l'équation canonique de l'hyperbole s'écrit :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Remarque: Lorsque x tend vers l'infini, on a : $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \cong \frac{x^2}{a^2}$

L'hyperbole admet deux droites asymptotes d'équations: $y = +\frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ qui se coupent en O.

Exercices : Coniques

Equation polaire d'une ellipse

La terre décrit autour du soleil une ellipse d'excentricité e et de paramètre p dont le soleil occupe un des foyers. Exprimer la distance maximale terre soleil (apogée) et la distance minimale (périgée)

Réponse: $R_{min}=p/(1+e)$ $R_{max}=p/(1-e)$

Trajectoire hyperbolique

On considère une particule se déplaçant sur une trajectoire d'équation polaire : $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta-\theta_0)-1}$ avec $p>0$, $e>1$ et $\cos\theta_0 = \dfrac{1}{e}$, l'angle θ variant entre 0 et $2\theta_0$

1. Représenter la trajectoire ; préciser les asymptotes et faire apparaître l'angle θ_0 sur la figure.

2. En supposant que la particule vient de l'infini, s'approche du foyer F de l'hyperbole et reparte vers l'infini calculer l'angle de déviation de la particule.

Réponse : 2. $D=\pi-2\theta_0$