Chapitre VII : Angle Solide

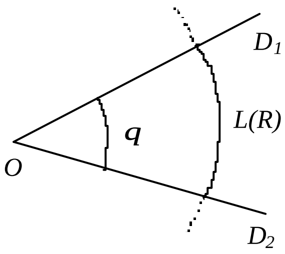
Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *définir un angle plan et donner l'expression de l'angle sous lequel on voit un arc de courbe*
- *définir un angle solide et donner l'expression de l'angle solide sous lequel on voit une surface*

I Angle plan

1°- Description

Nous donnerons de l'angle plan une description transposable à l'angle solide.



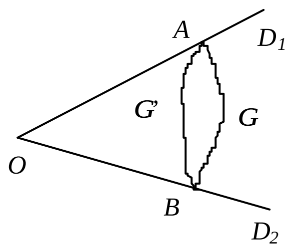
Pour mesurer l'angle q que font deux demi droites (O, D_1, D_2), on trace un cercle de rayon R centré en O, et on désigne par $L(R)$ la longueur de l'arc de cercle limité par les deux demi droites.

Par raison d'homothétie, le rapport $\frac{L(R)}{R}$ est indépendant de R et mesure la valeur de l'angle q : $q = \frac{L(R)}{R}$. L'unité de q (bien que q soit sans dimension) est le radian (symbole rad).

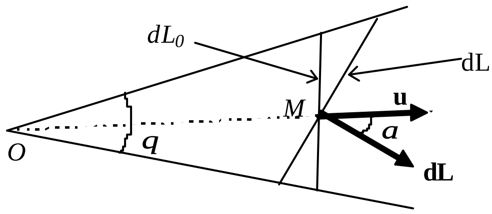
On peut aussi dire que la mesure de l'angle q est égale à la longueur de l'arc de cercle de rayon unité limité par les deux demi droites.

2°- Angle sous lequel on voit de *O* un arc de courbe

C'est l'angle défini par les deux demi droites s'appuyant sur la courbe. q ne dépend pas de l'arc de courbe G mais uniquement des points limites A et B de cet arc de courbe.



Expression élémentaire:



Pour un arc de courbe élémentaire dL (assimilé à un segment de droite), passant par le point milieu M de dL_0 (segment élémentaire, situé à une distance r de O, orthogonal à la direction OM et limité par les droites s'appuyant sur dL), on a : $dL_0 = dL \cos\alpha = \mathbf{dL} \bullet \mathbf{u}$ avec $\mathbf{dL} = dL\,\mathbf{n}$ (**n**: vecteur unitaire normal à la courbe et **u**: vecteur unitaire de la direction OM : $\mathbf{OM} = r\,\mathbf{u}$).

D'où
$$\boxed{d\theta = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{dL}}{r}}$$

Remarques:

1) $d\theta$ ainsi défini est algébrique: positif ou négatif selon l'orientation de **n** sur la courbe.

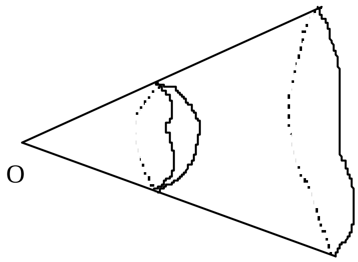
2) expression générale de l'angle sous lequel on voit de O la courbe Γ:

$$\boxed{\theta = \int_\Gamma \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{dL}}{r}}$$

3) l'angle sous lequel on voit un demi espace est $\theta_{\frac{1}{2}E^2} = \pi$ et l'angle sous lequel on voit l'espace entier est $\theta_{E^2} = 2\pi$

II Angle solide

1°- Description



Soit un cône quelconque de sommet O. Pour caractériser la partie de l'espace délimitée par ce cône, on envisage une calotte sphérique de rayon R et d'aire $S(R)$ délimitée par le cône.

Par raison d'homothétie, le rapport $\frac{S(R)}{R^2}$ est indépendant de R et mesure la valeur de l'angle solide Ω défini par le cône:

$$\boxed{\Omega = \frac{S(R)}{R^2}}$$

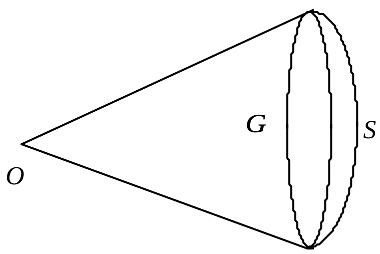
L'unité d'angle solide est le stéradian (symbole sr).

On peut aussi dire que Ω est égal à l'aire de la calotte découpée par le cône sur la sphère de centre O et de rayon unité.

Ainsi si le cône engendre le demi espace : $\Omega_{\frac{1}{2}E^3} = 2\pi$ et pour l'espace entier: $\Omega_{E^3} = 4\pi$

2°- Angle solide sous lequel on voit de *O* une surface *S*

C'est l'angle solide défini par le cône s'appuyant sur la surface S. Cet angle ne dépend pas de la surface S, mais uniquement du contour Γ sur lequel il s'appuie.



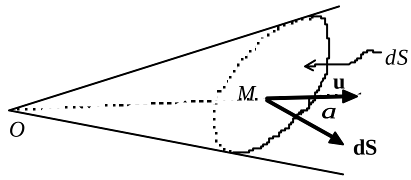
Expression élémentaire :

Par analogie avec l'angle plan, on a :

$$dW = \frac{dS \cdot \cos \boldsymbol{a}}{r^2} \quad \text{avec} \quad r = OM$$

soit $\boxed{dW = \dfrac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{dS}}{r^2}}$ où **dS**= *dS* **n** est le vecteur élément de surface.

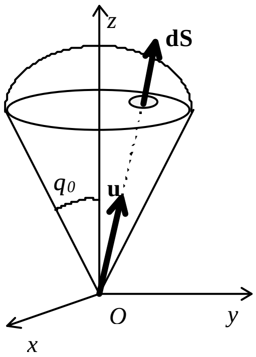
Remarques:



1) dW est algébrique selon l'orientation de **n** sur la surface.

2) expression générale de l'angle solide sous lequel on voit de O la surface S : $\boxed{W = \iint_S \dfrac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{dS}}{r^2}}$ est donc égal au flux du champ $\dfrac{\mathbf{u}}{r^2}$ à travers la surface S, ce qui constitue une *propriété importante* de l'angle solide dans la mesure où on va être amené en Physique à calculer le flux de champ « en $\dfrac{1}{r^2}$ ».

3°- Applications



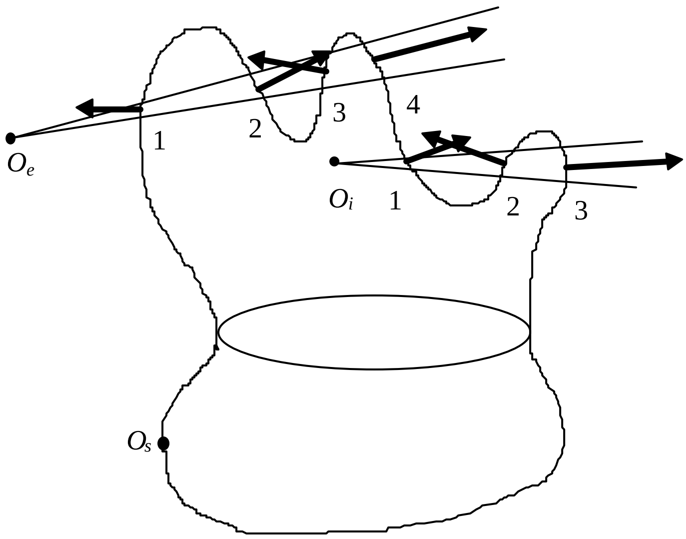
a) Cône de révolution

Soit à calculer l'angle solide défini par un cône de révolution de demi angle au sommet q_0 .On calcule W en utilisant les coordonnées sphériques: soit S la calotte découpée dans la sphère de rayon R. On a:

$$W = \iint_S \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{dS}}{r^2} = \int_0^{2p} dj \int_0^{q_0} \sin q \, dq = 2p\left(1 - \cos q_0\right)$$

On retrouve les $W(q_0 = p) = 2p$ (demi espace); $W(q_0 = 2p) = 4p$ (espace entier)

b) angle solide sous lequel on voit d'un point *O* une surface fermée



Le point O peut être à l'extérieur, à l'intérieur ou sur la surface. Il sera noté respectivement: O_e, O_i , O_s .

Comme pour toutes les surfaces fermées, les vecteurs élément de surface seront orientés conventionnellement vers l'extérieur.

O est à l'extérieur: O_e :

Tout cône élémentaire de sommet O_e coupe la surface un nombre *pair* de fois: les angles solides sous lesquels on voit de O_e les surfaces $dS_{1,2,3,4}$ sont égaux en valeur absolue, mais leur somme algébrique est nulle: $\Omega(O_e \to S) = 0$

O est à l'intérieur: O_i :

Tout cône élémentaire de sommet O_i coupe la surface un nombre *impair* de fois. Comme ci-dessus, les angles sous lesquels on voit de O les surfaces $dS_{1,2,3,4}$ sont égaux en valeur absolue, mais dans la somme algébrique, il subsiste un terme par cône élémentaire dont l'ensemble engendre tout l'espace: $\Omega(O_i \to S) = 4\pi$

O est sur la surface: O_s :

Le raisonnement est le même que pour O_i, mais cette fois, on engendre le demi espace, de sorte que : $\Omega(O_s \to S) = 2\pi$

En résumé:

$$\boxed{\Omega(O \to S) = \Phi\left(\frac{\mathbf{u}}{r^2} \to S\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } O \text{ est à l'extérieur} \\ 4\pi \text{ si } O \text{ est à l'intérieur} \\ 2\pi \text{ si } O \text{ est sur la surface} \end{cases}}$$

Exercices : Angles solides

Angle solide sous lequel est vu un disque

Exprimer l'angle solide sous lequel on voit de O le disque (D,R), O appartenant à l'axe du disque et $OD=z$.

Réponse: $W=2p(1-z/(z^2+R^2)^{1/2})$

Angle solide sous lequel est vu une face d'un tétraèdre

Sachant que l'aire d'un triangle sphérique d'angle A, B et C est donnée par $S=R^2(A+B+C-p)$, R étant le rayon de la sphère, A,B et C étant mesurés en radian, vérifier la formule sur deux cas particuliers.

Calculer numériquement l'angle solide sous lequel du sommet d'un tétraèdre on voit la face opposée.

Réponse: $W=0,55$ sr