Chapitre VI : Gradient d'une fonction

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *donner la signification du vecteur **grad** f*
- *calculer le vecteur **grad** f lorsque f est donnée en cartésienne, cylindrique ou sphérique*
- *trouver le potentiel dont dérive un champ de gradient*

I Définition

Considérons l'espace rapporté à un repère orthonormé $\{O,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$. Soit $f(x,y,z)$ une fonction scalaire des trois variables x,y,z. La différentielle de f s'écrit: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$. df représente la variation de f lorsque l'on passe du point $M(x,y,z)$ au point $M'(x+dx,y+dy,z+dz)$. Le vecteur $\mathbf{dM}$ correspondant à ce déplacement s'écrit: $\mathbf{dM} = \mathbf{MM'} = dx\,\mathbf{e_x} + dy\,\mathbf{e_y} + dz\,\mathbf{e_z}$.

df peut donc s'écrire: $\boxed{df = \mathbf{grad}f \bullet \mathbf{dM}}$

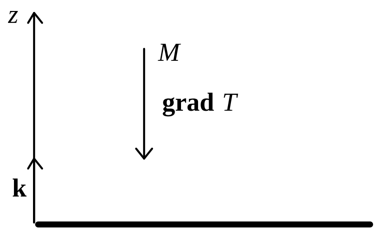
où le vecteur **grad** f (*gradient de f*) a pour expression:

$$\boxed{\mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e_2} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_3}}$$

■ *signification de* ***grad*** *f :* **grad** f est un vecteur qui indique la *direction* et le *sens* de croissance de la fonction f dans l'espace.

Exemple: Considérons l'atmosphère terrestre où la température en un point d'altitude z varie selon $T(z) = T(0) - az \quad (a > 0)$;

on a ainsi $\mathbf{grad}\ T = \frac{dT}{dz}\mathbf{e_3} = -a\mathbf{e_3}$: c'est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la température.



■ *propriétés:*

1) On a par définition :

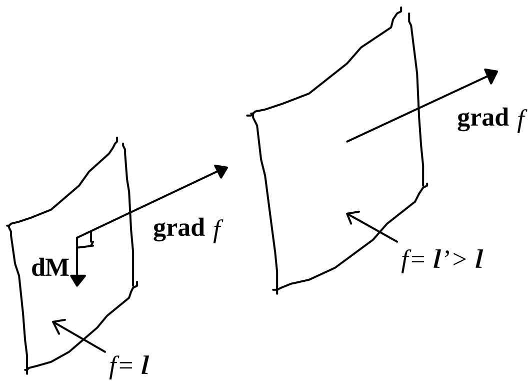
$$df = \mathbf{grad}\,f \bullet \mathbf{dM}\ .$$

Cette définition possède un caractère *intrinsèque*, c'est à dire ne dépendant pas du repère utilisé.

2) Une surface de niveau est définie par l'équation $f(x,y,z)$ = *cte.*

Sur une surface de niveau, la fonction *f* est donc constante. Ainsi, pour tout déplacement élémentaire sur cette surface, la variation de *f* est nulle. On a donc df = **grad** *f* • **dM** = 0.

Le vecteur **grad** *f* est *normal aux surfaces de niveau.*



Lorsque l'on passe d'une surface de niveau à une surface voisine correspondant à une plus grande valeur de *f* (df>0), la même relation (df = **grad** *f* • **dM**) montre que **grad** *f* est dirigé suivant les *valeurs croissantes* de *f*.

II Expressions du gradient

1°- En coordonnées cartésiennes

On a déjà vu que : $\boxed{\mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_z}}$

2°- En coordonnées cylindriques

On exprime le vecteur **grad** *f* sur la base locale des coordonnées cylindriques. Le déplacement élémentaire du point

$M(\rho,\theta,z)$ correspondant à une variation élémentaire des trois coordonnées ρ, θ, z s'écrit sur la base locale :

$$\mathbf{dM} = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\, d\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_z$$

La variation élémentaire correspondante de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

En identifiant avec la propriété intrinsèque $df = \mathbf{grad}\, f \bullet \mathbf{dM}$, on obtient:

$$\boxed{\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z}$$

3°- En coordonnées sphériques

Le même raisonnement conduit à :

$$\boxed{\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi}$$

III Champ de gradient

1°- Définition

On dit qu'un champ de vecteurs **V** est un champ de gradient s'il existe une fonction f telle qu'en tout point: $\mathbf{V} = \mathbf{grad}\, f$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $df = V_x dx + V_y dy + V_z dz$ soit une différentielle totale, soit d'après les résultats du chapitre sur les fonctions de plusieurs variables, il faut et il suffit que $\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ $\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}$ $\frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}$.

En pratique, on pourra souvent montrer l'existence d'une fonction f en donnant son expression.

Exemple: Montrons que le champ de vecteurs donné en sphériques par $\mathbf{V}(M) = \dfrac{k}{r^2}\mathbf{e_r}$ est un champ de gradient.

D'après les expressions du gradient en sphériques, si la fonction f existe, elle vérifie :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{k}{r^2} \quad ; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$

Intégrons en r la première équation: $f(r,\theta,\varphi) = -\dfrac{k}{r} + g(\theta,\varphi)$

La deuxième équation donne alors $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = 0$, d'où $g(\theta,\varphi) = cte + h(\varphi)$

Enfin la dernière équation donne $\dfrac{\partial h}{\partial \varphi} = 0$, d'où $h(\varphi) = cte$

En définitive, $f(r,\theta,\varphi) = -\dfrac{k}{r} + cte$

2°- Potentiel scalaire

Soit **V** un champ de gradient. On appelle *potentiel scalaire dont dérive le champ* ***V*** toute fonction scalaire *U* telle que:

V = - **grad** *U* (attention au signe)

■ *Propriétés* :

1) Les surfaces U = cte sont appelées *surfaces équipotentielles,* les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles, le champ étant dirigé vers les potentiels *décroissants.*

2) Le potentiel U est défini à une constante additive près: si U est un potentiel dont dérive le champ **V**, le potentiel $U'=U+cte$

en est un également. En Physique, le choix de la constante dépendra des conditions aux limites.

3) Une ligne de champ de gradient ne peut se refermer sur elle même puisque tout au long de cette ligne le potentiel ne cesse de décroître.

4) Un champ de gradient est à circulation conservative. En effet, la circulation de **V** le long d'un arc M_1M_2 est indépendante du chemin allant de M_1 à M_2 :

$$C(\mathbf{V}, M_1M_2) = \int_{M_1M_2} \mathbf{V} \bullet \mathbf{dM} = \int_{M_1M_2} -\mathbf{grad}U \bullet \mathbf{dM}$$

$$= \int_{M_1M_2} -dU = U(M_1) - U(M_2)$$

Exercices : Gradient d’une fonction

Champ de gradient

On donne dans le plan le champ de vecteurs $\mathbf{V} = X\,\mathbf{e_x} + Y\,\mathbf{e_y}$ avec :

$$X = \frac{3x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{x^2 y} \qquad\qquad Y = \frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{y^2 x}$$

Montrer que ce champ dérive d'un potentiel et calculer la fonction potentiel $U(x,y)$. Donner l'équation des lignes de champ et des équipotentielles.

Réponses: $U(x,y)=(x^2+y^2)^2/(xy)$ éq. des lignes de champ: $r^2 = A \cos 2q$

Champ dipôlaire

On considère le champ **E** défini dans un plan par ses composantes en coordonnées polaires: $E_r=(2k.\cos q)/r^3$ et $E_q=(k.\sin q)/r^3$

1. Trouver l'équation des lignes de champ
2. Montrer que ce champ peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{E}=-\mathbf{grad}\,V$$

déterminer le potentiel V sachant que V tend vers zéro à l'infini.

Réponses: $r= l \sin^2 q$; $V=(k.\cos q)/r^2$

Champ quadrupôlaire

Un champ a la symétrie de révolution autour de l'axe *Oz*, de sorte que l'on se place dans un plan méridien (c'est-à-dire contenant l'axe *Oz*). Dans ce plan, on adopte des coordonnées polaires avec *Oz* comme axe polaire; le potentiel a alors comme expression: $V=(k/r^3)(3\cos^2 q - 1)$

1. Quelle est l'allure des équipotentielles ?

2. Déterminer les composantes du champ **E**=-**grad** *V*.

3. Calculer le flux de ce champ à travers une calotte sphérique centrée en *O*, de révolution autour de *Oz*, et dont le rayon est "vu" du centre *O* sous l'angle a. Etudier le cas particulier $a=p$.

Réponses: $E_r = 3k(3\cos^2 q - 1)/r^4$; $E_q = 6k\cos q.\sin q/r^4$; $f = 6pk\cos a.\sin^2 a/r^2$