Chapitre IV : Fonctions scalaires à n variables scalaires

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *faire les manipulations courantes sur les fonctions de plusieurs variables : dérivée, différentielle, développement limité.*
- *définir une fonction implicite et calculer ses dérivées*
- *calculer quelques intégrales multiples*

I Généralités

Une fonction scalaire f à n variables scalaires $x,y,...$ est une application d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$f : (x, y,...) \in A \subset \mathbb{R}^n \to f(x, y,...) \in \mathbb{R}$$

Physiquement, cette fonction traduit la dépendance de la grandeur physique f des grandeurs physiques $x,y,...$ On note très souvent en physique l'application et l'image par $f(x,y,...)$.

Exemple : - période d'un pendule simple fonction de sa longueur et de l'intensité du champ de pesanteur $T(l,g)$

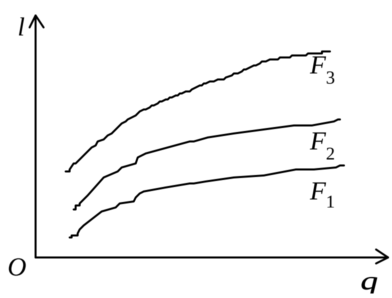
- longueur d'une barre fonction de sa température et de la traction exercée $l(\theta,F)$; etc.

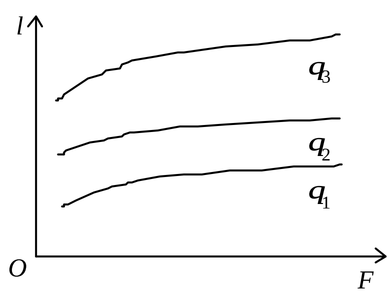
Souvent l'application se traduit par une relation mathématique trouvée à partir de lois physiques ou d'une étude expérimentale.

Exemple: $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; etc.

Pour étudier expérimentalement la fonction $f(x,y,...)$, on maintient constante n-1 variables aux valeurs $y_0,...$ et on étudie la dépendance de f en fonction de x: $f(x,y_0,...)$, puis on étudie la dépendance de f en fonction de y pour des valeurs fixées des autres variables $x_0...$: $f(x_0,y,...)$, etc. Cette étude peut se traduire alors par des familles de courbes.

Exemple: Etude de la longueur l d'une barre fonction de la température θ et de la traction F exercée :

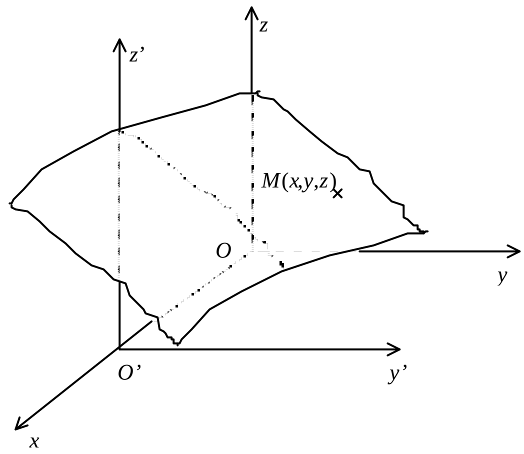




a) Etude de l en fonction de θ pour les valeurs F_1, F_2 , F_3 , ... de F.

b) Etude de l en fonction de F pour les valeurs θ_1 , θ_2 , θ_3 , ... de θ.

Une fonction à deux variables $f(x,y)$ est représentable par une surface dans l'espace à trois dimensions : au couple (x,y) on associe $z=f(x,y)$. L'ensemble des points $M(x,y,z)$ est la *surface* représentative de f.



Le plan $x=x_0$ coupe la surface suivant une courbe qui est la représentation graphique, dans le plan (O',y',z') de la fonction de y : $f(x_0,y)$.

De même, avec le plan $y=y_0$, on représentera la fonction de x : $f(x,y_0)$

Comme dans le chapitre sur les fonctions scalaires d'une variable, nous allons envisager quelques notions utiles concernant les fonctions à n variables. Nous admettrons, là encore, que les conditions d'existence des opérations étudiées sont satisfaites.

II Dérivées partielles

On appelle "*dérivée partielle*" de f par rapport à x, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, la dérivée de la fonction à <u>une</u> variable $f(\underline{x},y,...)$, les n-1 variables y,... étant considérées constantes.

Exemple: La fonction à trois variables: $f(x,y,z) = ye^{x^2} + xz$ admet trois dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2} + z\ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2}\ , \ \frac{\partial f}{\partial z} = x$$

Remarque: La notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ se lit : "d rond *f* sur d rond *x*".

Les dérivées partielles premières sont des fonctions à *n* variables, que l'on peut dériver à nouveau: on obtient les dérivées partielles secondes.

Exemple: La fonction ci-dessus admet 6 dérivées partielles secondes par rapport à *x, y,z, xy, yz, xz*.

On démontre (*théorème de Schwartz*) :

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

De façon générale, l'ordre des dérivation est indifférent :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y} = \ldots$$

Les dérivées partielles secondes de la fonction ci-dessus sont:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2ye^{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^{x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 1$$

Remarque: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$ est la pente de la tangente à la courbe représentant $f(\underline{x}, y_0)$ au point x_0 .

Dérivation composée :

Dans le cas d'une variable, la dérivée de la fonction composée $\varphi(x)=f(u(x))$ s'écrit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$$

Pour une fonction de plusieurs variables, prenons l'exemple de la fonction $f(u,v,w)$ où les trois variables u, v, w dépendent elles-mêmes de deux variables x et y. Soit :

$$\varphi(x,y)=f(u(x,y),v(x,y),w(x,y)).$$

On montre alors que: $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

La généralisation est immédiate.

III Différentielle

1°- Définition

Soit la fonction $f(x,y,...)$. Désignons par P le multiplet $(x,y,...)$. Notons P_0 le point $(x_0, y_0, ...)$ et P' le point $(x_0+h,y_0+k,...)$ où $h,k,...$ sont les accroissements petits des variables $x,y,...$ On démontre :

$$f(P')-f(P_0)=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)+\ldots+o(h,k,\ldots)$$

$$\text{avec} \quad \lim_{(h,k,...)\to(0,0,...)} o(h,k,\ldots)=0$$

A $o(h,k,...)$ près, on peut donc écrire :

$$f(P')-f(P_0)=h\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)+k\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)+\ldots$$

Le second membre est appelé "différentielle" de la fonction f au voisinage du point P. On note les accroissements: $f(P')-f(P_0)=df \quad , \quad h=dx \quad , \quad k=dy \quad , \quad \ldots$

D'où l'écriture de la différentielle de la fonction f au voisinage du point P :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy+\ldots$$

Elle permet de calculer de façon approchée l'accroissement de f au voisinage du point $(x,y,...)$. Noter la similitude de notation et de signification avec la différentielle d'une fonction à une variable.

Exemple : différentielle de la fonction $f(x,y,z) = ye^{x^2} + xz$:

$$df = \left(2xye^{x^2}\right)dx + e^{x^2}dy + xdz$$

2°- Différentielle totale

Considérons trois fonctions $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$ et $C(x,y,z)$ et posons :

$$df = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$$

Existe-t-il une fonction $f(x,y,z)$ au moins admettant df pour différentielle ?

En général, la réponse est non. En effet, pour qu'il en soit ainsi et d'après le théorème de Schwartz, il est nécessaire que :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x} \quad et \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$$

On admet que ces conditions sont suffisantes et on dit que df est une *différentielle totale* (ou *exacte*).

Pour montrer l'existence d'une fonction f dont df est la différentielle, on peut aussi expliciter la fonction f.

Exemple : Soit $df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

Si une fonction f existe, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$, d'où en intégrant par rapport à x :

$$f(x,y,z) = \int yz \cdot dx = xyz + \varphi(y,z)$$

où $\varphi(y,z)$ est une constante vis à vis de x.

Reportons cette expression de $f(x,y,z)$ dans $\frac{\partial f}{\partial y} = xz$; On obtient $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, et donc $\varphi(y,z)=\psi(z)$: φ ne dépend que de z. f s'écrit alors: $f(x,y,z)= xyz + \psi(z)$

En reportant dans $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ on obtient $\frac{d\psi}{dz} = 0$, et donc $\psi(z)=cte$.

En définitive il existe des fonctions f telles que

$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Elles s'écrivent: $f(x,y,z) = xyz + cte.$

df est donc une *différentielle totale*.

IV Fonctions implicites

Considérons l'équation: $y^2-x = 0$. On peut exprimer y en fonction de x (on a d'ailleurs deux déterminations): $y = +\sqrt{x}$ et $y = -\sqrt{x}$. Nous sommes ici dans un cas simple où il est possible d'expliciter y sous la forme $y = f(x)$.

Mais considérons l'équation $x - \frac{Rz}{y-b} e^{-a/Ryz} = 0 \quad a, b, R \in \mathbb{R}$

Il est impossible d'exprimer la fonction $y(x,z)$: on dit quelle est définie *implicitement* par l'équation $f(x,y,z) = 0$.

Néanmoins, il est possible de calculer ses dérivées partielles, ce qui peut être très intéressant en physique (par exemple, pour le calcul des coefficients thermoélastiques d'un fluide). En effet :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz = 0$$

A $z=cte$, on a $dz=0$ et donc $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=0$. On en déduit :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z=cte}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

On calculerait de même: $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z=cte}=\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$

Remarque: En multipliant membre à membre ces deux égalités, on a:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z=+1$$

De plus, si nous calculons: $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

on a la relation:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-1$$

On constate que l'on ne doit pas faire de « simplification » par *dx, dy, df,* ...(un signe "moins" apparaît à chaque fois que l'on fait le produit d'un nombre impair de dérivées)

V Equations aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles satisfaites par $f(x,y,...)$ toute relation liant f et ses dérivées partielles.

Exemple : Soit $f(x,y)$ telle que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

La solution exacte est rarement connue et on recherche en général des solutions numériques sur calculateur. On peut aussi rechercher des solutions *particulières* convenant aux conditions physiques.

Par exemple, en notant $u(x,y)$ la fonction $u(x,y)=x-y$, on vérifie que toute fonction de la forme: $f(x,y)=g(u)$ est solution de l'équation ci-dessus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Si l'on sait par exemple que la grandeur f varie sinusoïdalement en fonction de x et y, on peut envisager la solution vérifiant l'équation et les conditions physiques:

$$f(x,y) = A \sin a(x-y) \qquad A, a \in \mathbb{R}$$

VI Développements limités

Soit la fonction à deux variables (par exemple) $f(x,y)$. Notons P_0 le couple (x_0,y_0) et P le couple voisin (x,y). On peut comme dans le cas des fonctions d'une seule variable exprimer de façon approchée $f(P)$ en fonction de $f(P_0)$ et des accroissements petits des variables $x-x_0$, $y-y_0$. Une telle expression est le développement limité à l'ordre n (écrit ci-dessous à l'ordre 2) de la fonction f au voisinage du point P_0.

L'approximation est d'autant meilleure que le point P est voisin de P_0, et que l'ordre du développement est élevé.

$$f(P) = f(P_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}\left(P_0\right) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\left(P_0\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x - x_0)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(P_0\right) + (y - y_0)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(P_0\right) + 2(x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(P_0\right)\right)$$

En fait, en physique, il suffit souvent de considérer que le développement limité à l'ordre 3 (par exemple) de la fonction à 2 variables (par exemple) au voisinage de P_0 est de la forme :

$$f(x, y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx^3 + Hy^3 + Ix^2y + Jxy^2$$

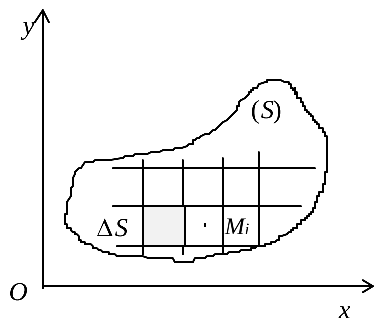
On peut toujours écrire une telle expression que l'on connaisse ou non explicitement la fonction f. Des considérations physiques permettent de déterminer les coefficients A,B,...

Remarque : une formulation particulièrement élégante du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de plusieurs variables sera donnée dans le chapitre « gradient d'une fonction ».

VII Intégrales multiples

1°- Présentation physique

Soit à calculer la masse d'une plaque S très mince plane dont la masse surfacique (masse par unité de surface) est une fonction de la position du point M : $f(M)$. Dans une première approche de ce calcul, on découpe par la pensée la plaque S en morceau ΔS, suffisamment petits pour que l'on puisse considérer la masse



surfacique uniforme sur chaque morceau: de valeur $f(M_i)$, M_i étant le point milieu du morceau n° *i*.

D'où une valeur approchée de la masse: $m \cong \sum_i f(M_i) \cdot \Delta S$

On obtient une valeur d'autant plus proche de la valeur exacte que ΔS est petit. La valeur exacte est la limite de l'expression ci-dessus quand ΔS tend vers 0.

Cette limite est *l'intégrale double* de la fonction $f(M)$ sur le domaine S :

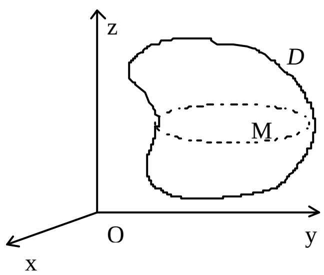
$$m = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\sum_i f(M_i) \cdot \Delta S \right) = \iint_S f(M) dS$$

Le calcul de cette intégrale nécessite le repérage cartésien ou polaire de M : $f(M)$ est une fonction à deux variables $f(x,y)$ ou $f(r,\theta)$. Le domaine (plan) d'intégration S est donné par l'équation cartésienne ou polaire de son contour. La surface élémentaire dS est exprimée en cartésiennes ($dS = dx\,dy$) ou en polaires ($dS = r\,dr\,d\theta$). D'où l'écriture :

$$\iint_S f(M) dS = \iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

On peut extrapoler ce qui précède aux intégrales multiples :

Intégrale triple: *f(M)* étant une application d'un domaine d'un domaine D de E^3 (volume) dans $\mathbb{R}$, $d\tau$ désignant le domaine élémentaire (volume élémentaire), on calcule l'intégrale triple de la fonction $f(M)$ sur le domaine D. Ce calcul nécessite le repérage cartésien, cylindrique ou sphérique de M; le domaine d'intégration est donné par l'équation de la surface qui délimite le volume.



On peut reprendre pour l'intégrale triple le raisonnement fait au sujet de l'intégrale double en terme de masse.

$$\iiint_D f(M)d\tau = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(\rho,\theta,z)\,\rho d\rho d\theta dz$$
$$= \iiint_D f(r,\theta,\varphi)r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Intégrale multiple d'ordre p: $f(M)$ étant une application d'un domaine D de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (D est un "hypervolume"), $d\delta$ désignant l'hypervolume élémentaire, on définit l'intégrale multiple d'ordre p de la fonction $f(M)$ sur le domaine D :

Avec $M=(x_1,x_2,...,x_p)$

$$\int_D^{(p)} f(M)d\delta = \int_D^{(p)} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)dx_1dx_2\ldots dx_p$$

2°- technique de calcul dans quelques cas remarquables

a) f(M) est constante sur le domaine D :

$$\forall M \in D,\ f(M) = a \in \mathbb{R}$$

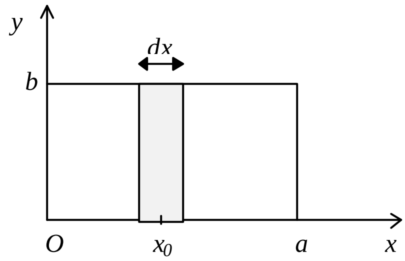
Quel que soit l'ordre de multiplicité, δ désignant la valeur du domaine (aire de S, volume de D, etc.), on a:

$$\int_D f(M)d\delta = a \cdot \int_D d\delta = a \cdot \delta$$

Exemple: $f(M)=a$ sur le disque (O,R): $\iint_{Disque} f(M)dS = a\pi R^2$

$f(M)=a$ sur la boule (O,R) : $\iiint_{Boule} f(M)d\tau = a \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$

b) La fonction des p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ est le produit de p fonctions à une variable: $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \prod_i f_i(x_i)$ *, et les domaines de variation des variables x_i sont indépendants.*



Exemple : soit à intégrer $f(x,y)=x{\cdot}y$ sur un rectangle de côtés a,b. Lorsque l'on fixe x à la valeur x_0 le domaine de variation de y est $[0,b]$. On voit que le domaine de variation de y *ne dépend pas* de la valeur particulière x_0 prise par x. De même, lorsque l'on fixe y à une valeur y_0, le domaine de variation de x est $[0,a]$, et ne dépend pas de la valeur particulière y_0 prise par y. On dit que les deux variables x et y sont *indépendantes* pour la description du domaine D.

On intègre $f(x,y)$ sur le rectangle de côtés (dx,b): sur ce domaine, on peut considérer que $f(x,y)$ est la fonction à une variable : $f(x_0,y)= x_0{\cdot}y$. On se ramène ainsi à l'intégrale simple :

$$x_0 dx \int_0^b y dy = \frac{1}{2} b^2 x_0 dx$$

Puis, par une seconde intégrale simple (en x), on décrit tout le domaine d'intégration :

$$\frac{1}{2} b^2 \int_0^a x dx = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

On vérifie que l'ordre d'intégration est indifférent. On constate que l'on est ramené au produit des intégrales simples en x, et en y. On notera :

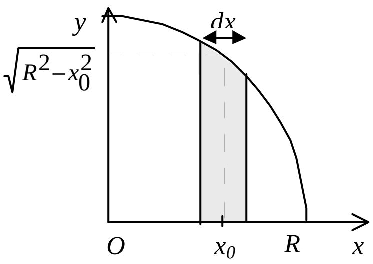
$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b} xy \cdot dxdy = \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

Pour une intégrale multiple d'ordre *p*, les <u>deux</u> conditions du *b)* étant satisfaites, on a:

$$\int_{x_1=a_1}^{b_1} \int_{x_2=a_2}^{b_2} \ldots\ldots \int_{x_2=a_2}^{b_2} f(x_1, x_2, \ldots., x_p)dx_1 dx_2 \ldots . dx_p = \prod_i \int_{x_i=a_i}^{b_i} f_i(x_i)dx_i$$

c) Un exemple moins simple...

Soit à intégrer $f(x,y)=xy$ sur le quart de disque (O,R).



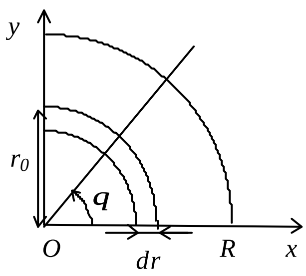
Pour x fixé à la valeur x_0 , y varie de 0 à $\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Comme en b), on intègre sur le domaine hachuré, une borne d'intégration *dépendant de* x . Puis par une seconde intégrale simple (x variant de 0 à R), on décrit le quart de disque.

Première intégration : $x_0 dx \displaystyle\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x_0^2}} y dy = \frac{1}{2} x_0 \left(R^2 - x_0^2 \right) dx$

deuxième intégration : $\displaystyle\frac{1}{2} \int_{x=0}^{R} x \left(R^2 - x^2 \right) dx = \frac{1}{8} R^4$

On notera : $\displaystyle\int_0^R x dx \int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} y dy = \frac{1}{8} R^4$

En fait, dans cet exemple, on peut se placer dans les conditions du *b)* par le choix des coordonnées polaires:



- la fonction $f(x,y)=xy$ s'exprime en polaires par: $f(r,\theta) = r^2 \sin\theta \cos\theta$

- Pour le quart de disque, les domaines de variation de r et θ sont indépendants :

$$r \in [O,R]\ \forall\theta \quad \text{et} \quad \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \forall r$$

première intégration en θ pour $r=r_0$ ($dS=r_0 dr d\theta$) :

$$r_0^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} r_0^3 dr$$

seconde intégration en r : $\displaystyle \frac{1}{2}\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{8} R^4$

On notera la simplicité de ce calcul (par rapport au calcul en coordonnées cartésiennes), dû au choix des coordonnées (polaires) mieux adaptées au problème.

Remarque : calcul de $\displaystyle I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$

On calcule I_0^2 en polaires :

$$I_0^2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-ay^2} dy = \iint_{quart\ de\ plan} e^{-ar^2} r dr d\theta$$

D'où : $I_0^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} r \cdot e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\pi}{4\alpha}$ et enfin : $\boxed{I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}}}$

Exercices : Fonctions à n variables scalaires

Différentielle d'une fonction de deux variables

Calculer la différentielle de $f(x,y)=y.exp\ x^2 + x.z$

`Réponse: df=(2xy.exp x² + z) dx + (exp x² ) dy + x dz`

Dérivée partielle d'une fonction définie implicitement

On considère la fonction $z(x,y)$ définie implicitement par $f(x,y,z)=0$. On considère d'autre part une fonction $w(x,y)$. Montrer alors que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_w = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_w$$

Interpréter graphiquement le résultat.

Exercices : Intégrales multiples

Intégration sur un rectangle

Intégrer la fonction x^2y^3 sur le rectangle de côtés a et b: (0,0) (a,0) (a,b) et (0,b)

Réponse: $a^3b^4/12$

Intégration sur un parallélépipède

Intégrer la fonction xyz sur le parallélépipède (a,b,c)

Réponse: $a^2\ b^2\ c^2\ /8$

Intégration sur un quart de disque 💻

Intégrer xy sur le quart de disque (O,R)

Réponse: $R^4/8$

Surface de la sphère 💻

Retrouver l'expression de la surface d'une sphère de rayon R en utilisant les coordonnées sphériques.

Réponse: $S=4\pi R^2$

Volume d'un cône 💻

Retrouver l'expression du volume d'un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R à l'aide d'un calcul en coordonnées cylindriques.

Réponse: $V=(1/3)\pi R^2h$