Chapitre III : Utilisation des nombres complexes

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- *donner l'intérêt de la notation complexe*
- *utiliser la notation complexe pour résoudre une équation différentielle*
- *représenter une grandeur vibratoire par son vecteur de Fresnel*

I Vibration monochromatique

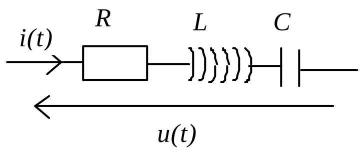
Un grand nombre de phénomènes physiques peuvent être représentés par une grandeur caractéristique qui vibre (son, lumière, etc.)

Une vibration monochromatique est décrite par une fonction sinusoïdale $f(t)$:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A s'appelle *l'amplitude* de la vibration, ω sa *pulsation* et φ sa *phase à l'origine*. L'ensemble $\omega t + \varphi$ est la phase.

Exemple: circuit *RLC* série



Si la tension $u(t)$ est sinusoïdale, $u(t)=U_0\cos(\omega t)$, la réponse en courant $i(t)$ est une fonction sinusoïdale de même pulsation: $i(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$

φ est le déphasage de i par rapport à u.

II Représentation complexe

Les termes ωt et φ ne sont pas aisément séparables dans l'expression de f. Aussi écrit-on f sous la forme:

$$\boxed{f(t) = Re\left[\underline{f}(t)\right] \text{ avec } \underline{f}(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}} \text{ et où } i^2 = -1$$

La fonction complexe $\underline{f(t)}$ s'écrit aussi: $\underline{f(t)} = A e^{i\varphi} e^{i\omega t}$

$\underline{A} = Ae^{i\varphi}$ s'appelle *l'amplitude complexe* de la vibration et *sa connaissance suffit* pour remonter à celle de f, dès que l'on connaît la pulsation ω.

Le choix de la définition de $\underline{f(t)}$ à partir de $f(t)$ provient des formules d'Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$$

III Intérêt de la notation complexe

1°- Addition de deux vibrations isochrones (de mêmes pulsations)

Si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont deux vibrations monochromatiques *isochrones*, il est plus facile de calculer $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ en passant par les complexes :

$$f(t)=\mathrm{Re}[\underline{f(t)}] \text{ avec } \underline{f(t)}=\underline{f_1(t)}+\underline{f_2(t)} \text{ et donc } \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$$

Exemple :

Vérifier à l'aide de la notation complexe que

$$f(t) = \cos \omega t + \sin \omega t = \sqrt{2} \cos(\omega t - \pi/4)$$

On associe à $\cos \omega t$ la fonction complexe $e^{i\omega t}$ et à $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ la fonction complexe $e^{i(\omega t-\pi/2)}=e^{i\omega t}\times(-i)$

On a alors:

$$f(t) = \mathrm{Re}\,[e^{i\omega t} + e^{i(\omega t-\pi/2)}] = \mathrm{Re}\,[e^{i\omega t}(1-i)] = \mathrm{Re}\,[\sqrt{2}\, e^{i(\omega t-\pi/4)}]$$

2°- Effet des opérateurs dérivation et intégration

Soit $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$.

a- dérivation

On a d'une part:

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

d'autre part

$$\underline{f}'(t) = \frac{d}{dt}\underline{f}'(t) = i\omega A e^{i(\omega t+\varphi)} = \omega A e^{i(\omega t+\varphi+\pi/2)} = i\omega \underline{f}(t)$$

Conclusion: $f'(t)$ a pour représentation complexe $\underline{f'(t)}=i\omega\underline{f(t)}$ et l'opération de *dérivation* se ramène en notation complexe à une *multiplication par* $i\omega$.

b- intégration

On a d'une part :

$$\int f(t)dt = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\varphi) = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t+\varphi-\pi/2)$$

d'autre part :

$$\int \underline{f}(t)dt = \frac{A}{i\omega}e^{i(\omega t+\varphi)} = \frac{A}{\omega}e^{i(\omega t+\varphi-\pi/2)} = \frac{1}{i\omega}\underline{f}(t)$$

Conclusion: $\int \underline{f}(t)dt$ a pour représentation complexe $\int \underline{f}(t)dt = \frac{1}{i\omega}\underline{f}(t)$ et l'opération d'*intégration* se ramène en notation complexe à une *division par* $i\omega$

c- exemple fondamental

Soit à chercher une *solution particulière sinusoïdale* de pulsation ω de l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = B\cos(\omega t+\psi)$$

On cherche une solution de pulsation ω fixée en cherchant directement la fonction complexe associée:

$$\underline{f(t)}=\underline{A}\,e^{i\omega t} \quad \text{et donc} \quad \underline{f'(t)}=i\omega\underline{f(t)} \text{ et } \underline{f''(t)}=-\omega^2\,\underline{f(t)}$$

On associe à $B\cos(\omega t+\psi)$ la fonction complexe $B\,e^{i(\omega t+\psi)}$ et l'équation s'écrit en notation complexe :

$$\left[-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2\right]\underline{A}e^{i\omega t} = Be^{i\omega t}\,e^{i\psi}$$

$$\text{soit : } \underline{A} = \frac{Be^{i\psi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$$

valeur qui permet le calcul de $f(t)$:

$$A = |\underline{A}| = \frac{B}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

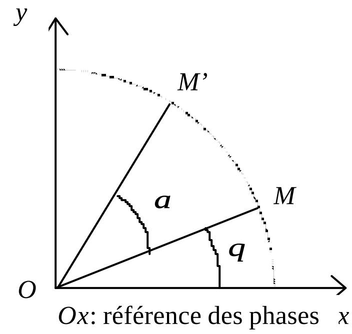
$$\varphi = \arg(\underline{A}) = \psi - \arg(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)$$

IV Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le nombre complexe $\underline{z} = A\,e^{i\theta}$ peut être représenté dans le plan cartésien Oxy par le point M de coordonnées:

$$x = A\cos\theta$$

$$y = A\sin\theta$$

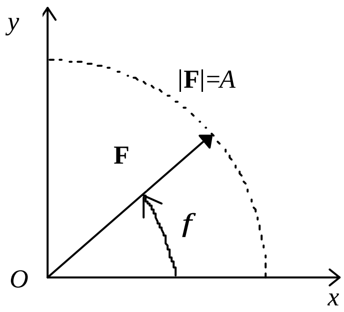


En particulier, si $\theta = \omega t$ où t représente le temps, le point M tourne autour de O à la vitesse angulaire ω.

De la même façon, $\underline{z}' = e^{i\alpha}\,\underline{z}$ est représenté par un point M' déduit de M par une rotation d'angle α.

V Représentation de Fresnel d'une grandeur vibratoire

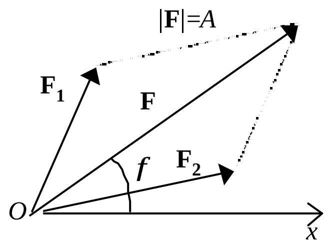
1°- Définition



Puisque seules l'amplitude A et la phase à l'origine f suffisent à caractériser une grandeur vibratoire dont on connaît la pulsation w, on peut utiliser dans les cas simples une autre représentation que la notation complexe : *la représentation de Fresnel.*

On associe à la fonction $f(t) = A\cos(wt + f)$ le *vecteur* **F** de module A et d'angle polaire f : c'est le *vecteur de Fresnel* associé à la grandeur sinusoïdale f.

2°- Addition de deux vibrations isochrones



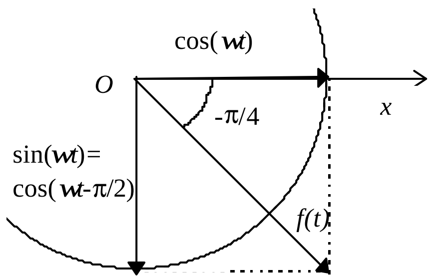
Le vecteur de Fresnel **F** associé à $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ est la somme des deux vecteurs $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$.

Par construction graphique ("*diagramme de Fresnel*") et par des considérations géométriques, on en déduit le module A et la phase f de f.

Remarque : On notera bien que l'on ne peut utiliser un diagramme de Fresnel qu'avec des vibrations de mêmes pulsations.

Exemple : Calculer par la méthode de Fresnel :

$$f(t) = \cos wt + \sin wt$$



On associe à $\cos\ wt$ un vecteur de module 1 et d'angle polaire 0. On associe à $\sin\ wt$ un vecteur de module 1 et d'angle polaire $-\pi/2$

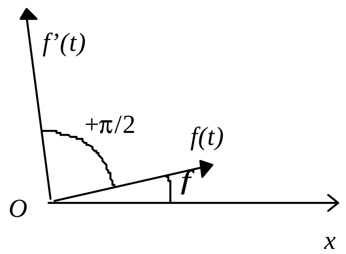
(car sin $wt = \cos(wt-\pi/2)$)

On a alors: $|\mathbf{F}|=\sqrt{2}$ et $f=-\pi/4$ d'où $f(t) = \sqrt{2}\cos(wt-\pi/4)$

3°- Effet des opérateurs dérivation et intégration:

Soit $f(t) = A\cos(wt+f)$ et **F** le vecteur de Fresnel associé.

a- dérivation

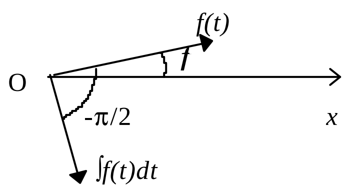


Comme $f'(t) = -wA\sin(wt+f) = wA\cos(wt+f+\pi/2)$, le vecteur **F'** associé à $f'(t)$ se déduit de **F** par une *rotation d'angle +p/2* et par une *multiplication par w*.

Exemple : pour une inductance, on a $U_L = L\dfrac{di}{dt}$

b- intégration

Comme $\int f(t)dt = \dfrac{A}{w}\sin(wt+f) = \dfrac{A}{w}\cos(wt+f-\pi/2)$, le vecteur $\int\mathbf{F}$ associé à $\int f(t)dt$ se déduit de **F** par une *rotation d'angle -p/2* et par une *division par w*.



Exemple : pour une capacité, on a $U_C = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$

Exercices : Utilisation des nombres complexes

Représentation complexe d'un point mobile

Soit M un point du plan d'affixe $z=Ae^{i\omega t}$. On donne A=5 cm, $\omega=2\pi$ rad.s^{-1}

1. Quelle est la courbe décrite par M lorsque t varie ?
2. Donner en mètres la distance parcourue par M en une heure.

Réponse: D=113,1 m

Représentation géométrique des nombres complexes

1. Représenter géométriquement les nombres complexes:

$$z_1=1+i \qquad z_2=2-i \qquad z_1-z_2 \qquad iz_1$$

2. Trouver leur formes polaires

Réponses: $z_1=(\sqrt{2}\,;45°)$ $z_2=(\sqrt{5}\,;-26,57°)$ $z_1-z_2=(\sqrt{5}\,;116,56°)$ $iz_1=(\sqrt{2}\,;135°)$

Vibration monochromatique

Une vibration monochromatique a pour expression réelle:

$$f(t) = -5 \cos(6\pi t-\pi/4)$$

1. Trouver toutes ses caractéristiques (amplitude, fréquence, période, phase)
2. Ecrire la fonction complexe associée f ainsi que la relation qui la relie à sa dérivée

Réponses: 1. $A=5$ $\nu=3$ Hz $T=0,33$ s $\varphi=5\pi/4$
2. $\underline{f}(t)=5\,e^{i(6\pi t+3\pi/4)}$ $\underline{f}'=+i6\pi\underline{f}$

Superposition de deux vibrations monochromatiques

Quelle est l'amplitude A et la phase f de la vibration résultant de la superposition des deux vibrations suivantes:

$$f_1(t) = A_1 \cos (wt - f_1) \qquad\qquad f_2(t) = A_2 \cos (wt - f_2)$$

On établira le résultat par la méthode trigonométrique et par la méthode complexe.

Réponse: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(f_1 - f_2)$

$\tan f = (A_1 \sin f_1 + A_2 \sin f_2) / (A_1 \cos f_1 + A_2 \cos f_2)$

Superposition de trois vibrations monochromatiques isochrones

Montrer que l'amplitude de la vibration résultant de la superposition des trois vibrations: $f_1(t) = \cos wt$ $f_2(t) = \cos (wt - f)$ $f_3(t) = \cos (wt + f)$ se met sous la forme: $|\sin 3f/2 / \sin f/2|$

Résolution d'une équation différentielle

Trouver une solution particulière sinusoïdale à l'équation différentielle:

$$f'' + f' + f = 1 + \cos t + 2 \sin t$$

Réponse: $f(t) = 1 + F \cos (t + f)$ avec $F = \sqrt{5}$

$f = -\text{Arcsin}(2/\sqrt{5}) - p/2$

Utilisation de la représentation de Fresnel

Utiliser la représentation de Fresnel pour calculer:

$$f(t) = 2 \cos(t) + \sin (t) + 2\sqrt{2} \cos(t + \pi/4) - 4\sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$$

Réponse: $f(t) = -5 \sin(t)$