Chapitre II : Fonctions scalaires d'une variable scalaire

Après une étude attentive de ce chapitre, vous serez capable de :

- comprendre l'utilité de la différentielle d'une fonction
- résoudre des équations différentielles simples
- donner l'utilité et calculer le développement limité d'une fonction
- donner la signification physique d'une intégrale et calculer des intégrales simples

I Généralités

Une fonction scalaire f à une variable scalaire x est une application d'une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in A \subset \mathbb{R} \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$$

Physiquement, cette fonction traduit la dépendance de la grandeur physique f avec la grandeur physique x. On note très souvent en physique l'application et l'image de x par $f(x)$.

Exemples:

- abscisse d'un mobile en fonction du temps: $x(t)$
- différence de potentiel aux bornes d'un dipôle électrique en fonction de l'intensité: $U(I)$
- longueur d'une barre fonction de sa température: $L(\theta)$

Souvent l'application se traduit par une relation mathématique trouvée à partir de lois physiques ou d'une étude expérimentale.

Exemples: $x(t) = x_0 \cos \omega t$; $U = R.I$; $L = L_0(1 + a\theta)$; etc.

La représentation graphique permet de visualiser la dépendance de f avec la variable x.

L'étude et la modélisation des phénomènes physiques nécessitent souvent l'utilisation des notions suivantes : dérivée, différentielle, équations différentielles, développements limités, intégrale simple.

Les conditions que doit satisfaire f pour que les opérations envisagées soient possibles sont en général remplie par exigence physique. Par exemple, on peut affirmer que beaucoup de fonctions rencontrées en physique sont continues, sans faire d'étude mathématique. Ainsi, pour un mobile se déplaçant sur une droite, on ne peut admettre que $x \to x_1$ quand $t \to t_0^-$ et $x \to x_2 \neq x_1$ quand $t \to t_0^+$! Cependant, certains phénomènes physiques requièrent des fonctions discontinues; par exemple, la chaleur massique d'un corps pur en fonction de la température présente une discontinuité au point de fusion.

II Dérivée

La notation usuelle en physique (pour l'application et l'image) est:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

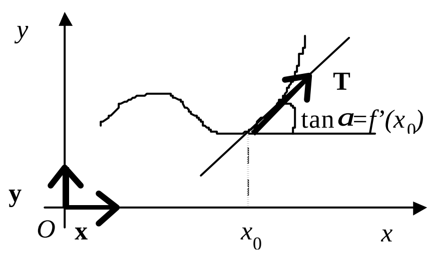
Dérivées usuelles:

Fonction	dérivée	fonction	Dérivée
x^{α}	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$
e^{ax}	$a\, e^{ax}$	$\sin x$	$\cos x$
u^x	$u^x \ln u$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$\text{cotan}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot\text{an}^2 x$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\text{arc}\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{ch}\, x$	$\text{sh}\, x$	$\text{arc}\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$f\,g$	$f'\,g + g'\,f$
$\operatorname{coth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \operatorname{coth}^2 x$	f/g	$(f'g-g'f)/g^2$
		$f \circ g$	$(f' \circ g)\, g'$

Interprétation géométrique :

Géométriquement, $f'(x_0)$ est la tangente de l'angle $(\mathbf{x},\mathbf{T})$.



La dérivée d'ordre n est : $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}$

III Différentielles

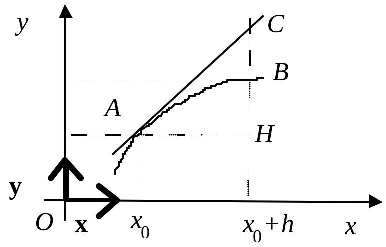
La différentielle de la fonction f au point x_0, notée $d_{x_0} f$ est *l'application linéaire* telle que:

$$\forall\, h \in \mathbb{R},\, d_{x_0} f(h) = f'(x_0)h \in \mathbb{R}$$

Utilisation en physique:

Un problème qui se pose souvent est de calculer de façon approchée l'accroissement de la fonction f entre les points x_0 et x_0+h, soit $f(x_0+h)-f(x_0)$, l'accroissement h de la variable x étant petit.

Or, géométriquement on a



$$f(x_0+h)-f(x_0) = HB = HC - BC$$

avec $HC = h\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ et où BC est une fonction $o(h)$ ayant la propriété:

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$$

A $O(h)$ près, on peut écrire: $f(x_0+h)-f(x_0) = h\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$, l'égalité étant d'autant plus valable que h est petit.

Autrement dit, négliger $o(h)$ revient à:

- assimiler au voisinage de x la fonction f à la fonction affine:

$$f(x_0)+(x-x_0)\, f'(x_0)$$

- confondre au voisinage du point A la courbe à sa tangente en A

En pratique, le petit accroissement de la variable x sera noté dx et l'accroissement de la fonction f lorsque x augmente de dx sera:

$$df = f'(x)dx = \frac{df}{dx}dx$$

appelé par abus de langage *différentielle de f(x) en x*

Exemple: différentielle de $f(x) = e^x\,(1 + x^2)$:

$$df = e^x\,(1 + 2x + x^2)dx$$

IV Equations différentielles

On appelle *équation différentielle* satisfaite par $f(x)$ toute relation liant $f(x)$ et ses dérivées.

Exemple: $f'(x)+x^2 f(x)=0$

Selon l'ordre maximal n des dérivées intervenant dans la relation, l'équation est dite d'ordre n (l'équation ci-dessus est du *1^er^ ordre*). Il faut résoudre l'équation puis éventuellement choisir parmi les solutions celles qui satisfont les exigences physiques.

Voici quelques exemples simples et fréquents:

$\boxed{f'(x)+af(x)=m(x)}$ $a \in \mathbb{R}$, $m(x)$ est une fonction donnée de x.

On démontre que la solution générale de cette équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre est la somme:

- de la *solution générale* $f_1(x)$ de l'équation sans second membre: $f'(x)+af(x)=0$. Pour trouver cette solution, on écrit l'équation sous la forme: $\dfrac{df}{dx}+af(x)=0$, puis on "sépare les variables": $\dfrac{df}{f}=-a\,dx$

L'intégration donne alors: $\ln(f)=-ax+cte$. En écrivant $cte=\ln(A)$ ($A \in \mathbb{R}^{+*}$), on obtient: $f_1(x)=Ae^{-ax}$

- d'une *solution particulière* $f_2(x)$ de l'équation avec second membre.

Par exemple, si $m(x) = cte = b$ alors $f_2(x) = b/a$ et la solution générale de l'équation s'écrit: $f_1(x)=Ae^{-ax}+\dfrac{b}{a}$. Les conditions physiques déterminent la valeur de A.

Si *m(x)* est une fonction *sinusoïdale*, la solution particulière est aisée à trouver en utilisant les nombres complexes (voir le chapitre correspondant)

Remarque : cette équation est linéaire dans la mesure où la somme de deux solutions est encore une solution.

Par contre, pour une équation du type $f'(x) + af^2(x) = m(x)$ il est aisé de vérifier qu'il n'en est rien.

$\boxed{f''(x) + \omega^2 f(x) = 0}$ $\omega^2 \in \mathbb{R}^{+*}$

On démontre que la solution générale de cette *équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre* est:

$$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme:

$$f(x) = A' \cos (\omega x + \varphi) \quad (A', \varphi \in \mathbb{R})$$

$\boxed{f''(x) - \omega^2 f(x) = 0}$ $\omega^2 \in \mathbb{R}^{+*}$

On démontre que l'on a $f(x) = A\, e^{\omega x} + B\, e^{-\omega x}$

et en notant: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique)

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolique)

on peut écrire la solution sous la forme: $f(x) = A' \operatorname{ch} \omega x + B' \operatorname{sh} \omega x$

$\boxed{f''(x) + 2\lambda f'(x) + \omega_0^2 f(x) = m(x)}$ $\omega_0^2 \in \mathbb{R}^{+*}$ $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $m(x)$ est une fonction donnée de x.

Cette équation revêt une grande importance car on la rencontre dans de très nombreux domaines de la physique : par exemple dans l'étude du mouvement d'un oscillateur amorti et entretenu, ou encore dans l'étude de nombreux circuits électriques.

On démontre que la solution générale de cette *équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre* est la somme:

- d'une *solution particulière* $f_2(x)$ de l'équation avec second membre.

Par exemple, si $m(x) = cte = b$ alors $f_2(x) = b/\omega_0^2$

Si $m(x)$ est une fonction *sinusoïdale*, ce qui sera souvent le cas en physique, la solution particulière est aisée à trouver en utilisant les nombres complexes.

- de la *solution générale* $f_1(x)$ de l'équation sans second membre: $f''(x) + 2\lambda f'(x) + \omega_0^2 f(x) = 0$

On cherche cette solution sous la forme : $f_1(x) = a\, e^{rx}$

En reportant f_1 dans l'équation différentielle, on obtient l'équation devant être vérifiée par r (c'est l'*équation caractéristique*) :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

D'où la discussion selon le signe du discriminant réduit :

$$\Delta' = \lambda'^2 - \left(\omega_0^2\right)^2$$

<u>1er cas :</u> $\Delta' > 0$:

les deux solutions sont : $r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'}$ et $r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'}$

$f_1(x)$ est alors une combinaison linéaire des deux solutions :

$$f_1(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} = e^{-\lambda x}\left(A_1 e^{-\sqrt{\Delta'}x} + A_2 e^{+\sqrt{\Delta'}x}\right)$$
$$= e^{-\lambda x}\left(A_1' \mathrm{ch}\sqrt{\Delta'}x + A_2' \mathrm{sh}\sqrt{\Delta'}x\right)$$

<u>2ème cas :</u> $\Delta' = 0$:

la racine double est $r_1 = r_2 = -\lambda$

$f_1(x)$ s'écrit alors : $f_1(x) = e^{-\lambda t}\left(A_1 + B_1 t\right)$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas :</u> $\Delta' < 0$:

les deux solutions sont : $r_1 = -\lambda - i\sqrt{-\Delta'} = -\lambda - i\omega$ et $r_1 = -\lambda + i\sqrt{-\Delta'} = -\lambda + i\omega$ en posant : $\omega = \sqrt{-\Delta'}$

$f_1(x)$ est alors une combinaison linéaire des deux solutions :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) = A_1 e^{r_1 x} + A_2 e^{r_2 x} &= e^{-\lambda x}\left(A_1 e^{-i\omega x} + A_2 e^{+i\omega x}\right) \\
&= e^{-\lambda x}\left(A_1' \cos \omega x + A_2' \sin \omega x\right)
\end{aligned}
$$

Les coefficients A_1, B_1 ou A_1', B_1' seront déterminés en imposant à $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ de vérifier des conditions initiales.

V Développements limités

On appelle *développement limité* d'ordre n, au voisinage de x_0, de la fonction f, le *polynôme* en $(x\text{-}x_0)$ de degré n tel que:

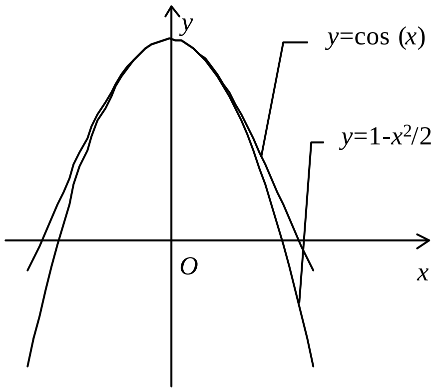
$$f(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + \ldots + a_i (x-x_0)^i + \ldots + a_n (x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} = 0$

La formule de Taylor donne les coefficients a_i du polynôme:

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots. \\
\ldots + \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + \ldots.. + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)
\end{aligned}
$$

L'intérêt de ce développement est de substituer, au voisinage de x_0 , à la fonction f un polynôme à $o(x\text{-}x_0)$ près.



Selon le problème et la précision souhaitée, on limite le développement à l'ordre 1, 2, 3...

Il peut être utile de connaître les développements limités *au voisinage de* 0 des fonctions usuelles :

$$e^x \cong 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$\sin x \cong x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+\cdots$$

$$\cos x \cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots$$

$$\ln(1+x) \cong x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

$$(1+x)^a \cong 1+\frac{a}{1!}x+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\cdots$$
$$+\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x} \cong 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

$$\sqrt{1+x} \cong x+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cong x-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\cdots+\cdots$$

Remarque: On démontre que le développement limité à l'ordre n d'une fonction produit de fonctions est égal au produit des développements limités des fonctions à des ordres convenables.

Par exemple, soit à développer à l'ordre 3 la fonction

$$f(x) = e^{-x^2} \ln(1+x)$$

On peut utiliser la formule de Taylor ou, d'après ci-dessus, faire le produit des développement limités des fonctions:

- à l'ordre 3: $e^{-x^2} \cong 1 + \dfrac{(-x^2)}{1!} + \dfrac{(-x^2)^2}{2!} + \cdots = 1 - x^2 + o(x^3)$

  (pour obtenir ce développement, il suffit de remplacer x par $-x^2$ dans le développement de e^x et de ne conserver que les termes d'ordre inférieur ou égal à trois)

- à l'ordre 3: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$

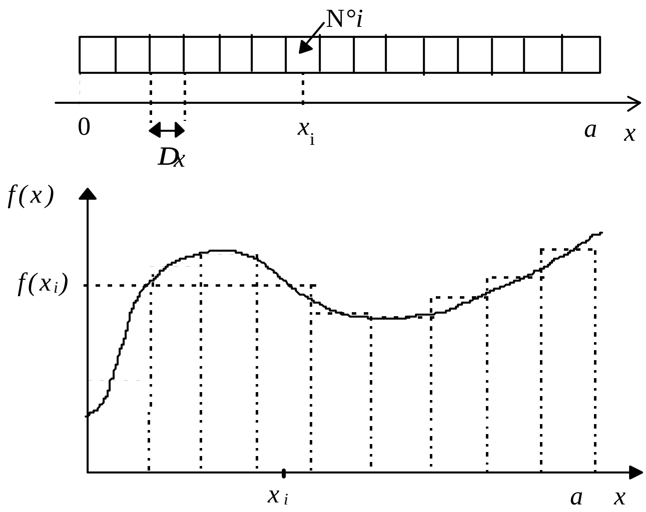
Dans le produit, *on ne conserve que les termes d'ordre inférieur ou égal à trois*, soit:

$$f(x) = (1 - x^2 + o(x^3))(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

VI Intégrales simples

1°- Présentation physique

Soit à calculer la masse d'une barre de longueur a dont la masse linéique (masse par unité de longueur) est une fonction $f(x)$ de l'abscisse x sur la barre. Dans une première approche de ce calcul, on découpe par la pensée la barre en tronçons de longueur Δx, suffisamment petits pour que l'on puisse considérer la masse linéique uniforme sur chaque tronçon, de valeur $f(x_i)$, x_i étant le point milieu du tronçon n° i.



On substitue alors à la fonction $f(x)$ la fonction "escalier":

$$\forall x \in \left[x_i - \frac{\Delta x}{2} ; x_i + \frac{\Delta x}{2} \right[: f(x) = f(x_i)$$

D'où une valeur approchée de la masse de la barre: $M \cong \sum_i f(x_i)\,\Delta x$

On obtient une valeur d'autant plus proche de la valeur exacte que Δx est petit. La valeur exacte est la limite de l'expression ci-dessus lorsque Δx tend vers 0. Cette limite est *l'intégrale de la fonction* $f(x)$ sur le domaine $[0,a]$:

$$M = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x = \int_0^a f(x)dx$$

Graphiquement, $\int_0^a f(x)dx$ est l'aire de la surface délimitée par les droites $x=0$, $x=a$, l'axe Ox et la courbe.

2°- Méthodes usuelles d'intégration

a- Méthode directe

On connaît une primitive $F(x)$ de $f(x)$, alors:

$$\int_0^a f(x)dx = F(a) - F(0)$$

b- Intégration par parties

f et g étant deux fonctions de x, on a $\int fdg = \left[f(x)g(x)\right] - \int gdf$

Exemple: $\int \ln(t)dt = \int 1 \cdot \ln(t)dt = \left[t \cdot \ln(t)\right] - \int dt = x \cdot \ln(x) - x + cte$

c- Intégration par changement de variables

Exemple: Soit à calculer $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$

Faisons le changement de variables: $x = R\sin\theta$

La fonction devient: $f(\theta) = R\cos\theta$.

L'élément d'intégration devient : $dx = R\cos\theta d\theta$

Les bornes du domaine d'intégration deviennent :

$$x \in [0; R] \Rightarrow \boldsymbol{q} \in \left[0; \frac{\boldsymbol{p}}{2}\right]$$

D'où : $$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\boldsymbol{p}/2} R^2 \cos^2 \boldsymbol{q} d\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{p}R^2}{4}$$

d- Intégration par récurrence

Soit à calculer l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2}\,dx$ (n pair: $n = 2p$)

En intégrant par partie, on obtient :

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} e^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2a}{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+2} e^{-ax^2}\,dx$$

d'où la relation de récurrence que l'on écrit: $I_n = \dfrac{n-1}{2a} I_{n-2}$ et dont on déduit l'expression de I_{2p} en fonction de I_0 :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2a)^p} I_0$$

avec la notation: $(2p-1)!! = (2p-1)\cdot(2p-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1$ ("semi factorielle 2p-1")

Remarques:

- le calcul de I_0 est donné dans le chapitre traitant des intégrales multiples
- On peut de même montrer que:

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1} e^{-ax^2}\,dx = \frac{(2p)!!}{(2a)^p} I_1$$

Primitives usuelles

fonction	primitive	fonction	primitive
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$
$\ln x$	$x\ln x - x$	$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}$
$e^{cx} \quad c \in \ ^*$	$\dfrac{1}{c}e^{cx}$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathrm{cotan}^2 x$	$-\mathrm{cotan} x - x$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{cotan} x$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2+x^2}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{p}{4}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{a^2-x^2}\right\rvert$	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$
$\dfrac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$	$-\dfrac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{1/2}}$	$\dfrac{1}{\cos^3 x}$	$\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{p}{4}\right)\right\rvert$
$\dfrac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$	$\dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{1/2}}$	$\dfrac{1}{\sin^3 x}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$
$\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2}\arctan(x)+\dfrac{x}{2(1+x^2)}$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch} x}$	$2\arctan\left(e^x\right)$
$\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$	$\dfrac{1}{2}\arctan(x)-\dfrac{x}{2(1+x^2)}$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh} x}$	$\ln\left\lvert th\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$

Exercices : Dérivées, différentielles

Calculs de dérivées 💻

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a- $f(x)=3x^3-5x^2+x+3$ b- $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ c- $f(x)=(3x+1)^5/(2x^2-x-1)^3$

d- $f(x)=\text{cotan}\, x$ e- $f(x)=x.\ln x - x$ f- $f(x)=\ln|\tan(x/2+\pi/4)|$

Réponses: b) f'(x)= $\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$

Dérivées successives 💻

Calculer les trois premières dérivées de

$$f(x)=\frac{1+x^2}{2}\arctan(x)-\frac{x}{2}$$

Réponses: f'(x)=x.arctan x f"(x)=Arctan x + x/(1+x^2) $f^{(3)}(x)=2/(1+x^2)^2$

Calcul d'une différentielle

Calculer la différentielle de $f(x)=e^x(1+x^2)$

Réponse: $df = e^x(1+2x+x^2)dx$

Recherche d'une fonction de différentielle connue

Chercher *f* telle que $df=Ln\, x\, dx$

Exercice : Equations différentielles

Equation différentielle du second ordre avec second membre

Résoudre l' équation différentielle $f''(x)+w^2 f(x)=m(x)$ avec:

a- $m(x)=ux+v$ b- $m(x)=b.e^x$ c- $m(x)=b.\sin x$.

Réponses: $f(x)= A \cos wx + B \sin wx + f_2(x)$ *avec* a) $f_2(x)=(ux+v)/w^2$ b) $f_2(x)=b/(1+w^2)\ e^x$ c) $f_2(x)=b/(1+w^4)\ (w^2 -x) \sin x$

Equation différentielle du premier ordre avec second membre

Résoudre l' équation différentielle $f'(x)+w^2 f(x)=m(x)$ avec:

a- $m(x)=ux+v$ b- $m(x)=b.e^x$ c- $m(x)=b.\sin x$.

Réponses: $f(x)= A\ e^x + f_2(x)$ *avec*

a) $f_2(x)=(ux+v-u/w^2)/w^2$

b) $f_2(x)=b/(1+w^2)e^x$ c) $f_2(x)=b(w^2 \sin x - \cos x)/(1+w^4)$

Equation différentielle du premier ordre non linéaire

Résoudre: $f'(x)+(1/x).f(x)=0$

Réponse: $f(x)=a/x$

Exercices : Développements limités

Produit de deux développements limités

1. Rappeler les développements limités à l'ordre n des fonctions $f(x)=e^x$ et $f(x)=\ln(1+x)$

2. En utilisant la formule de Taylor d'une part, et le produit des développements limités d'autre part, donner le développement limité à l'ordre 3 de $f(x)=e^{-x^2}\ln(1+x)$

Réponse: $x-x/2-2x^3/3$

Développements limités au voisinage de 0

Former les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $1/(1+x+2x^2)$; $1/(1\text{-}\sin x)$; $1/\cos x$

On utilisera le développement limité de $1/(1+u)$, u étant $x+2x^2$, $-\sin x$, $\cos x - 1$ respectivement.

Réponses: $1-x-x^2+3x^3$; $1+x+x^2+5x^3/6$; $1+x^2/2$

Exercices : Intégrales simples

Relation de récurrence entre des intégrales

On pose $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2}\,dx$

Montrer que : $I_{2p+1}=\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1}e^{-ax^2}\,dx = \dfrac{(2p)!!}{(2a)^p} I_1$

Calculer I_1 . En déduire I_3.

Réponse: $I_1=1/(2a)$; $I_3=1/(2a^2)$