Corrigé de Laurent BEAU
Professeur de Sciences Physiques en Math Spé MP
Lycée Mohamed V. CASABLANCA
beau@techno.net.ma

N'hésitez pas à me signaler des erreurs ou à me suggérer des commentaires ou des réponses plus "élégantes". Merci.

PARTIE A

I. Température et pression en différents points

I.1. En régime permanent, les débits massiques sont constants au niveau de chaque composant. Par conservation de la matière, le débit massique du fluide au niveau des deux turbines est $d_{air} + d_{car}$, celui au niveau du compresseur étant d_{air}.

Au niveau de chaque composant, considérons l'évolution d'une masse m de fluide entre l'instant t et l'instant t+dt (cf. figure 1): ce système est fermé et la forme algébrique du premier principe s'écrit alors pendant dt :

$$dE = d(U + E_{KM} + E_{pM}) = \delta W + \delta Q$$

où U représente l'énergie interne, E_{KM} et E_{pM} respectivement l'énergie cinétique macroscopique et l'énergie potentielle macroscopique, E l'énergie totale, W le travail reçu du milieu extérieur (à l'exception de celui des forces qui dérivent de E_{pM}) et Q l'énergie calorifique (ou chaleur) reçue du milieu extérieur.

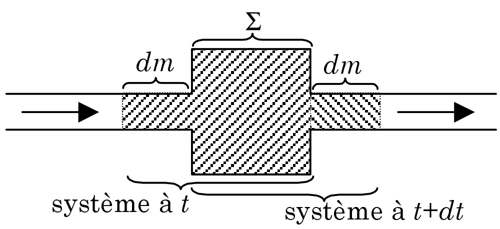


Figure **1**

En notant u_e, c_e (resp. u_s, c_s), l'énergie interne massique et la vitesse de la masse $dm = dm_e = dm_s$ (en régime permanent) de fluide entrant dans le composant (resp. sortant du composant) pendant dt et en négligeant la variation d'énergie potentielle, l'énergie du système fermé vaut aux instants t et dt :

$$E(t) = E_\Sigma(t) + dm.(u_e + \frac{1}{2}c_e^2) \qquad E(t+dt) = E_\Sigma(t+dt) + dm.(u_s + \frac{1}{2}c_s^2)$$

En régime permanent : $E_\Sigma(t) = E_\Sigma(t+dt)$ donc :

$$dE = dm\left(u_s - u_e + \frac{1}{2}\left(c_s^2 - c_e^2\right)\right) = \delta W \text{ car } \delta Q = 0 \text{ (car l'écoulement est adiabatique)}$$

Sachant que l'enthalpie massique s'écrit : $h = u + pv$ et en notant $w_{(e)\to(s)}$ le travail massique total reçu par le fluide de l'extérieur, il vient :

$$\boxed{h_s - h_e + \frac{1}{2}\left(c_s^2 - c_e^2\right) = w_{(e)\to(s)} + \left(p_s v_s - p_e v_e\right)} \quad \textbf{(1)}$$

qui se simplifie si on néglige les variations d'énergie potentielle :

$$\boxed{h_s - h_e = w_{(e)\to(s)} + \left(p_s v_s - p_e v_e\right)} \quad \textbf{(2)}$$

Le travail massique des forces de pression $w_{pression} = p_e v_e - p_s v_s$ n'est pas "récupérable" par le composant (compresseur, turbine…) mais correspond au travail reçu par une masse unité de fluide de la part du fluide amont et aval. Seul le terme $w_{(e)\to(s)} - w_{pression} = w_{(e)\to(s)} + (p_s v_s - p_e v_e) = w_u$ est utilisable ; il est appelé travail utile.

I.2. Le compresseur reçoit la puissance utile :

$$P_{u(1)\to(2)} = d_{air}(h_2 - h_1) = d_{air} c_p (T_2 - T_1) > 0 \quad (\Delta h = c_p \Delta T \text{ pour un gaz parfait})$$

La turbine et la turbine de puissance reçoivent respectivement les puissances utiles :

$$P_{u(3)\to(4)} = (d_{air} + d_{car}) c_p (T_4 - T_3) < 0 \text{ et } P_{u(4)\to(5)} = (d_{air} + d_{car}) c_p (T_5 - T_4) < 0$$

Les signes des trois puissances sont déterminés par leur fonctionnement différent : le compresseur reçoit un travail mécanique de la part de la turbine. La turbine de puissance (comme la turbine) fournit un travail mécanique servant à entraîner le rotor d'un hélicoptère, l'hélice d'un navire, les roues d'une locomotive ou encore un alternateur électrique.

Toute la puissance utile délivrée par la turbine est récupérée par le compresseur. Il vient donc :

$$P_{u(3)\to(4)} = -P_{u(3)\to(4)} \text{ ou encore } \boxed{(d_{air} + d_{car})(T_3 - T_4) = d_{air}(T_2 - T_1)}$$

I.3.

I.3.1. La réaction de combustion du kérosène s'écrit :

$$C_x H_y + \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 \leftrightarrows x\, CO_2 + \frac{y}{2} H_2O$$

Quand le carburant est brûlé sans excès d'air, la richesse α s'écrit :

$$\boxed{\alpha = \frac{d_{car}}{d_{air}} = \frac{M_{C_xH_y}}{(M_{O_2} + 3{,}7 M_{N_2} + 0{,}05 M_{Ar})\left(x + \frac{y}{4}\right)} = 6{,}9\%}$$

La chambre de combustion n'échangeant pas d'énergie calorifique avec l'extérieur, l'énergie thermique délivrée par la combustion de kérosène sert à échauffer les gaz de combustion. On peut donc écrire :

$$d_{car} P_{cal} = (d_{car} + d_{air}) c_p (T_3 - T_2) \text{ ou encore } \boxed{\alpha P_{cal} = (1+\alpha) c_p (T_3 - T_2)}$$

A.N : $T_3 = 3300$ K

I.3.2. Si $T_3 = 1573\text{ K}$, alors $\alpha = \dfrac{1}{\dfrac{P_{cal}}{c_p (T_3 - T_2)} - 1} = 2{,}5\% < 6{,}9\%$: excès d'air par rapport au kérosène.

On a alors : $T_3 - T_4 = \dfrac{d_{air}}{d_{air} + d_{car}}(T_2 - T_1) = \dfrac{1}{1+\alpha}(T_2 - T_1)$

A.N : $\underline{T_4 = 1353\text{ K i.e. } t_4 = 1080°\text{C}}$

I.4. Les détentes dans les deux turbines sont isentropiques. Elles vérifient donc la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^{\gamma} = cste$$

On en déduit :

$$\underline{p_4 = p_3 \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 4{,}1 \text{ bar}}$$

$$\underline{T_5 = T_4\left(\frac{p_4}{p_5}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1050\ \text{K}}\ \text{ soit }\ \underline{t_5 = 777°\text{C}}$$

Les débits massiques vérifient :

$$d_{air} + d_{car} = (1+\alpha)d_{air} = \frac{-P_{u(4)\to(5)}}{c_p(T_4 - T_5)}$$

c'est-à-dire $\boxed{d_{air} = \frac{1}{1+\alpha}\frac{-P_{u(4)\to(5)}}{c_p(T_4-T_5)} = 16\ \text{kg.s}^{-1}}$ et $\boxed{d_{car} = \alpha.d_{air} = 0{,}40\ \text{kg.s}^{-1}}$

Ces valeurs sont élevées mais correspondent à une puissance de turbine de 5000 kW c'est-à-dire 6800 chevaux-vapeur.

II. Evaluation des pertes dans le compresseur réel

II.1. La variation d'entropie ds d'une unité de masse de gaz parfait se calcule par exemple "le long d'un chemin réversible" :

$$ds = \frac{\delta q_{rév}}{T} = \frac{du + pdv}{T} = c_v\frac{dT}{T} + \frac{R}{M}\frac{dv}{v} = c_v\frac{dT}{T} + \frac{R}{M}\left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p}\right) \text{ d'après la loi du gaz parfait : } pv = \frac{R}{M}T$$

Comme $c_v + r = c_p$ (grandeurs massiques), il vient :

$$\boxed{ds = c_p\frac{dT}{T} - r\frac{dp}{p}} \qquad \textbf{(3)}$$

En fixant la pression p, on obtient en intégrant la relation précédente :

$$s(p,T) = s(p,T_1) + c_p\ln\left(\frac{T}{T_1}\right)$$

Dans un diagramme (T,s), les isobares $p = p_0$ réversibles sont définies par : $s(p_0,T) = s(p_0,T_1) + c_p\ln\left(\frac{T}{T_1}\right)$

$$T = T_1\exp\left(\frac{s(p_0,T) - s(p_0,T_1)}{c_p}\right) \text{ i.e. } T = A\exp\left(\frac{s(p_0,T)}{c_p}\right) \text{ où } A = T_1\exp\left(-\frac{s(p_0,T_1)}{c_p}\right) > 0$$

Etudions une autre isobare $p = p_1$ d'équation : $s(p_1,T) = s(p_1,T_1) + c_p\ln\left(\frac{T}{T_1}\right)$.

Pour une température T fixée, les deux isobares sont distantes de : $s(p_1,T) - s(p_0,T) = s(p_1,T_1) - s(p_0,T_1)$

En intégrant (**3**) à T constante, on obtient :

$$s(p_1,T) - s(p_0,T) = s(p_1,T_1) - s(p_0,T_1) = -r\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$$

Cette distance est indépendante de T, donc l'isobare $p = p_1$ se déduit de l'isobare $p = p_0$ par une translation horizontale de $r\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) < 0$ si $p_1 > p_0$ (figure **2**).

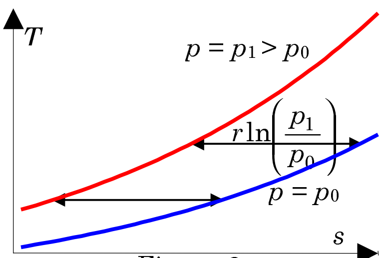


Figure **2**

II.2.

II.2.1. La compression isentropique $(1) \to (2s)$ est représentée dans le diagramme (T,s) par un segment vertical ascendant (car $p_2 > p_1$). La

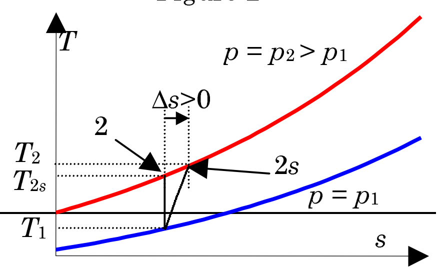


Figure **3**

compression réelle est irréversible donc $\Delta s > 0$. On voit clairement sur la figure **3** que $T_2 > T_{2s}$.

II.2.2. $P_{u(1)\to(2s)} = d_{air} c_p (T_{2s} - T_1)$ et $P_{u(1)\to(2)} = d_{air} c_p (T_2 - T_1)$

$$P_{u(1)\to(2s)} < P_{u(1)\to(2)} \text{ car } T_{2s} < T_2$$

En utilisant la loi de Laplace pour la transformation $(1) \to (2s)$, On trouve :

$$\underline{T_{2s} = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 520\,\text{K}}$$

Le rendement isentropique vaut alors :

$$\boxed{\eta_c = \frac{T_{2s} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1\right)}$$

II.2.3. A.N : $\underline{\eta_c = 98{,}5\%}$

II.3.

II.3.1. Par définition : $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ et la relation de Mayer : $c_p - c_v = r$

On en déduit :

$$\boxed{r = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p = 0{,}286\,\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$$

$$s(2) = s(1) + c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - r\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 6{,}0\,\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$s(3) = s(2) + c_p \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 1{,}1\,\text{kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$s(5) = s(4) = s(3)$ car les transformations dans les turbines sont isentropiques.

Le point $(2s)$ se trouve à la verticale de (1).

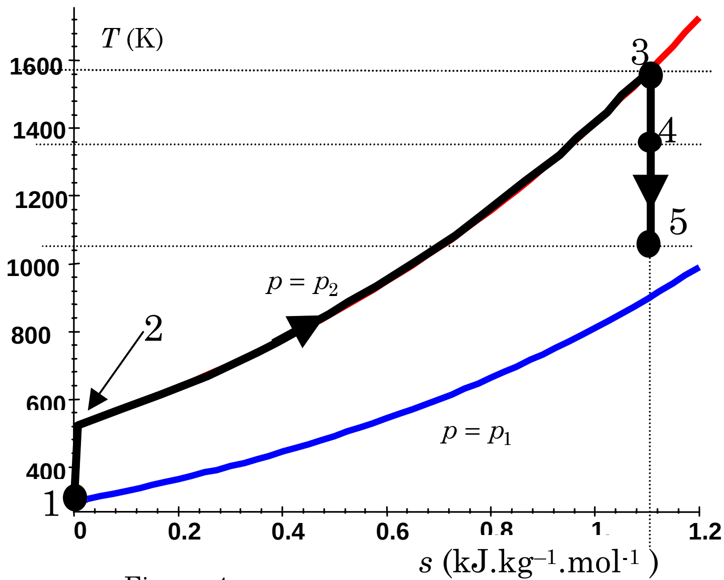


Figure 4

II.3.2. Une aire dans le diagramme $T = f(s)$ est homogène au produit $T.s$ qui est une énergie.

L'aire sous-tendue par l'isobare p_2 est :

$$A = \int_{2s}^{2} T ds = \int_{2s}^{2} T c_p \frac{dT}{T} = c_p (T_2 - T_{2s}) = 3{,}4\,\text{kJ.kg}^{-1}$$

On peut remarquer qu'assimiler l'isobare entre (2s) et (2) à un segment de droite, comme le suggère l'énoncé, ne simplifie pas le calcul de l'aire.

On trouve bien que :

$$A = c_p (T_2 - T_{2s}) = h_2 - h_{2s}$$

Cette différence représente le travail mécanique supplémentaire qu'il faut fournir au compresseur du fait de la non réversibilité de la compression.

On peut calculer la puissance supplémentaire qu'il faut fournir à cause de la non-réversibilité de la compression :

$$\underline{P_{u(1)\to(2)} - P_{u(1)\to(2s)} = d_{air}c_p\left(T_2 - T_{2s}\right) = 16 * 3{,}4.10^3 = 54\,\text{kW}}$$

III. Echangeur de chaleur

III.1. L'échangeur de chaleur étant parfait (globalement adiabatique et sans travail utile), la puissance calorifique reçue par le gaz sortant du compresseur est égale à la puissance fournie par le gaz sortant de la turbine de puissance :

$$d_{air}c_p\left(T_{5'} - T_5\right) + kd_{air}c_p\left(T_{2'} - T_2\right) = 0 \Rightarrow \underline{T_{2'} = T_2 - \frac{T_{5'} - T_5}{k} = 873\,\text{K} \text{ soit } t_{2'} = 600°\text{C}}$$

III.2. Le mélange est adiabatique et sans travail utile donc le bilan est le même qu'à la question précédente :

$$d_{air}(1-k)c_p\left(T_{2''} - T_2\right) + kd_{air}c_p\left(T_{2''} - T_{2'}\right) = 0 \Rightarrow \underline{T_{2''} = (1-k)T_2 + kT_{2'} = 0{,}8T_2 + 0{,}2T_{2'} = 593\,\text{K} \text{ soit } t_{2''} = 320°\text{C}}$$

III.3. Comme à la question 1.3.2, on trouve la nouvelle richesse :

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\dfrac{P_{cal}}{c_p\left(T_3 - T_{2''}\right)} - 1} = 2{,}3\%}$$

L'utilisation de l'échangeur de chaleur a permis de diminuer la richesse donc de faire des économies de carburant.

IV. Adjonction d'une tuyère

L'utilisation de (**1**) $h_s - h_e + \frac{1}{2}\left(c_s^2 - c_e^2\right) = w_{(e)\to(s)u}$ avec $w_{(e)\to(s)} = 0, c_e = 0$ et $c_s = V_6$ conduit à :

$$c_p(T_6 - T_{5'}) = -\frac{1}{2}V_6^2 \text{ soit } \underline{T_6 = T_{5'} - \frac{1}{2c_p}V_6^2 = 879\,\text{K}}$$

La variation d'entropie pour cette transformation vaut :

$$\underline{s(6) - s(5') = c_p \ln\left(\frac{T_6}{T_{5'}}\right) - r\ln\left(\frac{p_6}{p_5}\right) = 25\,\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}}$$

Cette variation n'est pas très importante en comparaison de $s(3) - s(2)$. La transformation est néanmoins irréversible. Si la transformation était réversible, la température de sortie serait de 842 K (application de la loi de Laplace) et la vitesse de sortie plus importante : 525 m.s^{-1}.

V. Rendement thermique

$d_{car}P_{cal}$ représente la puissance consommée dans la chambre de combustion.

Le rendement thermique de la machine s'écrit donc :

$$\eta = \frac{P_{u(4)\to(5)}}{\alpha d_{air}P_{cal}}$$

<u>Sans échangeur de chaleur</u> : $\alpha = 2{,}5\% \Rightarrow \underline{\eta = 29\%}$

<u>Avec échangeur de chaleur</u> : $\alpha' = 2{,}3\% \Rightarrow \underline{\eta' = 31\%}$

L'introduction de l'échangeur permet donc de réduire la consommation de carburant donc les coûts de fonctionnement.

FIN DE LA PARTIE A

PARTIE B

I. Préliminaires

Dans tout le problème, le système étudié sera le cerceau. L'étude se fera dans le référentiel R_L.

I.1. La vitesse de glissement est égale à la vitesse du point I du cerceau puisque dans le référentiel d'étude le plan incliné est immobile :

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{IC} \wedge \omega \boldsymbol{k} = (v + R\omega)\,\boldsymbol{i}$$

I.2. D'après le théorème de Kœnig, l'énergie cinétique du cerceau s'écrit :

$$E_K = E_K^* + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left((R\omega)^2 + v^2\right)$$

où E_K^* est l'énergie cinétique du cerceau dans le référentiel barycentrique.

I.3. Le théorème du centre de masse s'écrit

en projection sur (Ox) : $\underline{m\dot{v} = mg\sin\alpha + T}$ (1)

en projection sur (Oy) : $\underline{N = mg\cos\alpha}$ (2)

Le théorème du moment cinétique en C (centre de masse) en projection sur (Oz) s'écrit : $J\dot{\omega} = RT$ soit :

$$\underline{m(R\dot{\omega}) = T} \qquad (3)$$

I.4. Ecrivons le théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{dE_K}{dt} = \boldsymbol{T}.\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{g}.\boldsymbol{v}$ soit :

$$\underline{m\left(R^2\omega\dot{\omega} + v\dot{v}\right) = T(v + R\omega) + mgv\sin\alpha} \qquad (4)$$

I.5. (4) = (1).v + (3).$R\omega$ donc l'équation (4) n'est pas indépendante des équations (1) et (3).

I.6. $R = \sqrt{\dfrac{J}{m}} = 0{,}5\ \text{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \dfrac{7}{R} = 14\ \text{rad.s}^{-1}}$

II. Première phase

II.1. $V(t=0) = v_0 + R\omega_0 = 9\ \text{m.s}^{-1}$ donc le début du mouvement est un *glissement* ($V \neq 0$) *descendant* ($v > 0$).

$V > 0$ donc $T < 0$ et $|T| = f|N|$ d'après les lois de Coulomb du frottement de glissement.

T vaut alors :

$$\boxed{T = -fmg\cos\alpha} \qquad (5)$$

II.2. En éliminant T entre (1) et (5), on obtient l'accélération de C :

$$\dot{v} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha = -a$$

donc la vitesse de C :

$$\boxed{v = -at + v_0} \qquad (6)$$

En éliminant T entre (3). et (5), on obtient : $R\dot{\omega} = -fg\cos\alpha$. En intégrant :

$$\boxed{R\omega = -fg\cos\alpha\ t + R\omega_0} \qquad (7)$$

$$\boxed{V = v + R\omega = -(a + fg\cos\alpha)t + R\omega_0 + v_0} \qquad (8)$$

On a posé $\underline{a = (f\cos\alpha - \sin\alpha)g = 1\ \text{m.s}^{-2}}$

II.3. v s'annule pour l'instant t_1 tel que : $\underline{t_1 = \frac{v_0}{a}}$

On a alors : $\underline{V_1 = R\omega_1 = R\omega_0 - fg\cos\alpha t_1 = R\omega_0 - fg\cos\alpha\frac{v_0}{a}}$

II.4. En intégrant (6), on obtient la distance parcourue par le cerceau à l'instant t : $x(t) = -a\frac{t^2}{2} + v_0 t$.

La distance parcourue pendant cette première phase est donc :

$$\boxed{x_1 = x(t_1) = -a\frac{t_1^{\ 2}}{2} + v_0 t_1 = \frac{v_0^2}{2a}}$$

II.5. Application numérique : $T_1 = -0{,}6$ N ; $t_1 = 2$ s ; $R\omega_1 = V_1 = 3$ m.s^{-1} ; $x_1 = 2$ m

III. Deuxième phase

III.1. $V_1 > 0$ donc il y a toujours glissement à l'instant t_1. Le mouvement pour $t > t_1$ est un *glissement* ($V \neq 0$) *ascendant* (v devient négatif à cause du glissement).

III.2. Les lois d'évolution de v, $R\omega$ et V sont les mêmes qu'en II.2 car il y a toujours glissement.

III.3. Le glissement cesse quand $V = 0$ soit à l'instant t_2 tel que :

$$\boxed{t_2 = \frac{R\omega_0 + v_0}{a + fg\cos\alpha}}$$

$R\omega$ et v sont alors opposées et valent :

$$\boxed{R\omega_2 = -v_2 = -fg\cos\alpha\frac{R\omega_0 + v_0}{a + fg\cos\alpha} + R\omega_0 = \frac{R\omega_0 a - v_0 fg\cos\alpha}{a + fg\cos\alpha}} \quad (9)$$

III.4. $$\boxed{x_2 = x(t_2) = -a\frac{t_2^{\ 2}}{2} + v_0 t_2 = -\frac{a}{2}\frac{(v_0 + R\omega_0)^2}{(a + fg\cos\alpha)^2} + v_0\frac{(v_0 + R\omega_0)}{(a + fg\cos\alpha)}} \quad (10)$$

III.5. Application numérique : $t_2 = 3$ s ; $R\omega_2 = -v_2 = 1$ m.s^{-1} ; $x_2 = 1{,}5$ m

IV. Troisième phase

IV.1. Le glissement a cessé à l'instant t_2 avec $v_2 < 0$. Le mouvement ultérieur sera donc un roulement sans glissement ascendant.

IV.2. Il n'y a pas glissement donc : $v + R\omega = 0$.

En éliminant T/m entre (1) et (3), on obtient : $\dot{v} - R\dot{\omega} = g\sin\alpha$ soit $\boxed{\dot{v} = \frac{g\sin\alpha}{2}}$ car $\dot{v} + R\dot{\omega} = 0$

Les lois horaires de v et $R\omega$ sont donc : $\boxed{v(t') = \frac{g\sin\alpha}{2}t' + v_2 = -R\omega(t')}$

On en déduit : $\boxed{T = mR\dot{\omega} = -\frac{mg\sin\alpha}{2}}$ (on vérifie bien que $|T| < f|N|$: condition de non-glissement).

IV.3. Cette phase se termine quand la vitesse de C s'annule soit à l'instant $\boxed{t'_1 = -\frac{2v_2}{g\sin\alpha}}$

$R\omega$ s'annule aussi au même instant : $\underline{R\omega'_1 = 0}$

IV.4. En intégrant la loi horaire de $v(t')$, on obtient la position de la roue à l'instant t' :

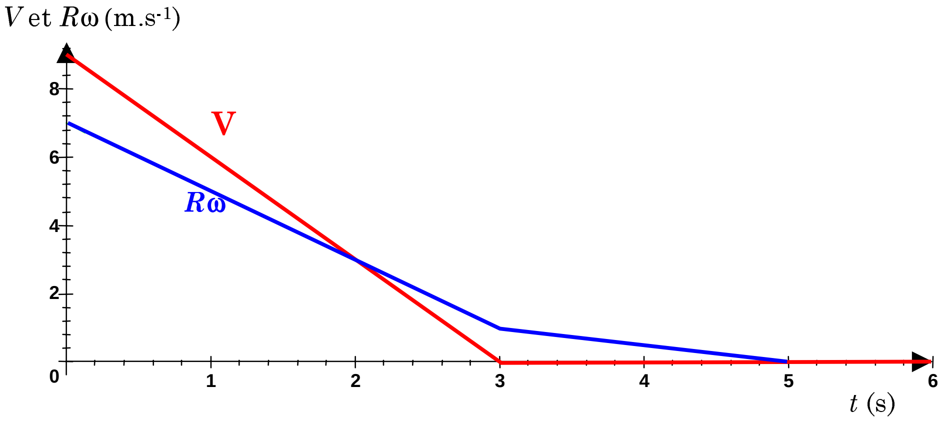
$$x(t') = \frac{g\sin\alpha}{4}t'^2 + v_2 t' + x_2$$

Au moment où le cerceau s'arrête, sa position est :

$$\boxed{x'_1 = \frac{g\sin\alpha}{4}t'^2_1 + v_2 t'^2_1 + x_2 = x_2 - \frac{v_2^2}{g\sin\alpha}}$$

IV.5. Application numérique : $T = -0{,}15$ N $t'_1 = 2$ s ; $x'_1 = 0{,}5$ m

V. Représentation graphique



Au delà de la troisième phase, le cerceau aura un mouvement de *roulement sans glissement descendant.*

VI. Aspect énergétique

VI.1. $E_K(t'_1) - E_K(0) = -\frac{1}{2}m\left((R\omega_0)^2 + v_0^2\right)$

Seule la composante tangentielle T de $\boldsymbol{F_R}$ travaille. Ce travail est nul lors de la troisième phase car la vitesse de glissement est nulle. Donc :

$$W_{F_R} = \int_0^{t_2} \boldsymbol{T}.\boldsymbol{V}dt = -fmg\cos\alpha\int_0^{t_2} Vdt = -fmg\cos\alpha\int_0^{t_2}(v_0 + R\omega_0) - (a + fg\cos\alpha)t\,dt$$

$$W_{F_R} = -fmg\cos\alpha\left((v_0 + R\omega_0)t_2 - (a + fg\cos\alpha)\frac{t_2^2}{2}\right)$$

Après simplifications : $\boxed{W_{F_R} = -fmg\cos\alpha\frac{(v_0 + R\omega_0)^2}{2(a + fg\cos\alpha)}}$

Le travail du poids est simplement :

$$W_{mg} = mg\sin\alpha\, x'_1 = mg\sin\alpha\left(x_2 - \frac{v_2^2}{g\sin\alpha}\right)$$

En utilisant (9) et (10) : $W_{mg} = m(fg\cos\alpha - a)\left(\frac{v_0 + R\omega_0}{a + fg\cos\alpha}\left(v_0 - \frac{a}{2}\frac{v_0 + R\omega_0}{a + fg\cos\alpha}\right)\right) - m\left(\frac{v_0 fg\cos\alpha - aR\omega_0}{a + fg\cos\alpha}\right)^2$

Après simplifications (calculs à prendre avec précautions !) :

$$\boxed{W_{mg} = m\frac{2v_0R\omega_0 fg\cos\alpha - a\left((R\omega_0)^2 + v_0^2\right)}{2(a + fg\cos\alpha)}}$$

On vérifie que : $\boxed{W_{\boldsymbol{F}_R} + W_{m\boldsymbol{g}} = E_K(t'_1) - E_K(0)}$

VI.2. $E_K(t_2) - E_K(0) = \frac{1}{2}m\left((R\omega_2)^2 + v_2^2 - (R\omega_0)^2 - v_0^2\right) = -7{,}65\text{ J}$

Le travail de $\boldsymbol{F_R}$ est le même qu'à la question précédente : $W_{\boldsymbol{F}_R} = -fmg\cos\alpha\frac{(v_0 + R\omega_0)^2}{2(a + fg\cos\alpha)} = -8{,}1\text{ J}$

Le travail du poids est $W_{m\boldsymbol{g}} = mg\sin\alpha\, x_2 = 0{,}45\text{ J}$

On vérifie encore le théorème de l'énergie cinétique : $W_{\boldsymbol{F}_R} + W_{m\boldsymbol{g}} = \Delta E_K$

FIN DE LA PARTIE B